مقدمة لتحليل القرارات

و نظرية المباريات

بإستخدام *Excel Solver* و *Treeplan* و

SilverDecisions و *Gambit* و *SageMath*

تأليف

د. عدنان ماجد عبدالرحمن بري

استاذ الأنظمة العشوائية الحركية المشارك

جامعة الملك سعود

المحتويات

الموضوع	الصفحة
تحليل القرار	6
جدول تحليل المدفوعات	6
السيطرة او الهيمنة	9
معايير إتخاذ القرار	9
إتخاذ قرار تحت شرط التأكد	9
إتخاذ قرار تحت عدم التأكد	9
معيار Maximin	9
معيار Maximin بإستخدام صفحات النشر	11
معيار Minmax Regret	12
معيار Minmax Regret بإستخدام صفحات النشر	15
معيار Maximax	16
مبدأ عدم كفاية الأسباب The Principle of Insufficient Reason	18
إتخاذ القرار تحت المخاطرة Decision aking Under Risk	21
معيار القيمة المتوقعة Expected Value Criterion	22
القيمة المالية المتوقعة Expected Monetary Value (EMV)	21
القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة Expected Value of Perfect Information	22
حساب EVPI	23
شجرات القرار Decision Trees	24
خواص شجرة القرار	24
مضاف صفحات النشر Treeplan	27
الرجوع للخلف Rolling Back	40
توضيح الرجوع للخلف	42
SilverDecision	44
تصميم و تحليل شجرات القرار بإستخدام SilverDecision	44
حالات دراسة Case Studies	53
تمارين	67
نظرية المباريات	92
تعريف ومفاهيم أساسية	94
شجرة المباراة Tree of the Game	99
مصفوفة المباراة Matrix of the Game	100
تمارين	116
المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين Two Persons Zero Sum Games	120
الهيمنة Dominance	129
معلومات المباريات Game Information	153
مباريات لاعبين بمجوع صفري (عودة)	153
الحل الأمثل لمباريات لاعبين بمجموع صفري	154
الحل بواسطة إكسل	157
حل المباريات المختلطة	158

الطريقة البيانية 159
الحل بواسطة إكسل 163
حل المباريات بطريقة البرمجة الخطية 163
الحل بواسطة Excel Solver 168
التوازن Equilibrium 178
توازن الإستراتيجية المسيطرة Dominant Strategy Equilibrium 179
توازن ناش Nash Equilibrium 180
الإستراتيجيات المسيطرة إطلاقا 180
صيغ توازن ناش 181
Gambit 182
تصميم مباراة بالصيغة الإستراتيجية في Gambit 183
تغيير بعض الخواص في Gambit 192
حيرة المساكين وحلها بواسطة Gambit 198
تصميم مباراة بصيغ الإنتشار Extensive Form 200
توازن السيطرة المتكررة Iterated dominance Equilibrium 204
التكرار الضعيف Weak Iteration 214
فعالية باريتو Pareto Efficiency 218
سيطرة باريتو Pareto Dominance 218
حل الأمثلة السابقة بواسطة Gambit 225
حالات دراسة Case Studies 238
المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين 257
المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين غير التعاونية 259
المباريات التعاونية (التفاوضية) 270
التمثيل البياني للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين 275
نقطة الوضع الراهن 282
الإستراتيجية التهديدية المثلى 282
بعض طرق حل المباريات التفاضلية 287
طريقة الأمثلية الكلية 287
طريقة منصف الربع الأول لنقطة الوضع الراهن 289
طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد 291
طريقة شبلي و ناش Shapley and Nash Method 294
تمارين 311
المباريات متعددة الأطراف N-Person Games 318
المباريات التعاونية متعددة الأطراف 315
قلب المباراة The Core 331
المجموعات المستقرة Stable Sets 334
نواة المباراة The Nucleus 335
قيم دوال شبلي Shaplet Function Values 341
تمارين 347
تطبيقات متنوعة 351

بعض التطبيقات العسكرية 351
بعض التطبيقات الإقتصادية 373
مباريات الشكل الطبيعي بواسطة Sage 386
بعض المباريات الأساسية المبنية داخل Sage 391
المباريات التعاونية بإستخدام Sage 399
مباريات ماني - بيرسون Many-Person Games 399
الشكل التحالفي و دالة التمييز Coalition Form and Characteristic Function 399
Supersdditivity و Monotone و Constant-Sum 400
التكلفة الإرضائية و النواة Imputation and the Core 409
التكلفة الإرضائية 409
المباريات الأساسية Essential Games 410
النواة The Core 410
قيمة شابلي و فرضية شابلي 411
حساب قيمة شابلي 412
حساب قيمة شابلي للمباريات التعاونية بواسطة Sage 412
مباريات التطابق Matching Games 428
المباريات التوافقية Combinatorial Games 434
مباراة إزاحة بسيطة Simple Take-Away Game 434
المواقف P و المواقف N P-positions and N-positions 436
المباريات الخصمية Subtraction Games 437
مباراة نم The Game of Nim 439
مجموع نم Nim Sum 440
نم بعدد كبير من الكومات 443
نظرية المنفعة Utility Theory 446
تمارين 463
المراجع 482
ملحق: الحل بواسطة LINGO 484
ملحق: نظام SageMath للحسبات الرياضية 488
ملحق: تعريف المباريات القياسية 499

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على أشرف المرسلين سيدنا ونبينا محمد. وبعد
نتج هذا الكتاب من خلال تدريسي لمادة " تحليل القرارات و نظرية المباريات" لطلاب مرحلة البكلاريوس في قسم الإحصاء وبحوث العمليات بجامعة الملك سعود.
تحليل القرارات و من ثم إتخاذ القرار المناسب من أهم المجالات التي يجب تدريب الطالب عليها نظريا و عمليا لإستخدامها في جعبة الأدوات التي يحتاجها في عمله. وهذه الأداة تساعد كثيرا في إتخاذ القرار الأقرب للصواب في جميع نشاطات المجتمع.
نظرية المباراة تعتبر أداة اخرى مهمة جدا في كثير من مناحي النشاطات البشرية.
لقد أقتبست أجزاء كثيرة (موضحة جيدا في الكتاب) من كتاب الدكتور زيد البلخي و الذي يعتمد على الطريقة التقليدية في تقديم المادة وكذلك الطرق اليدوية البسيطة للحل.
أضفت الكثير للمادة بحيث أن طرق الحسابات تعتمد على تطبيقات حاسوبية معروفة ومستخدمة في هذا المجال مثل صفحات النشر Excel و Excel Solver و التطبيق Treeplan الذي يولد و يحل شجرات القرار و افضل تطبيق لنظرية المباريات Gambit و النظام الرياضي Sage ويعرف ايضا بـ SageMath.
إنني اؤمن و اعتقد أن الحاسب قد أصبح البديل الأقوى للحسابات اليدوية ولا أدل على ذلك من حل برنامج خطي Linear Program بإستخدام جدول السمبلكس Simplex Tableau أو بإستخدام Excel Solver حيث أن جدول السمبلكس يأخذ في حسابه لأربعة أو خمسة متغيرات قرار، أكثر من ساعتين هذا إذا أستطاع الشخص تجنب الأخطاء (يوجد الكثير من العمليات على الكسور). فكيف بعدد قد يتجاوز العشرات بل المئات من متغيرات القرار؟
هذا و إني ارجوا من الله ان يستفاد من هذا الكتاب باللغة العربية كخطوة أولية لفهم الموضوع ومن ثم الرجوع للمراجع العلمية المتوفرة بشكل كبير جدا باللغات الاخرى (و أهمها اللغة الإنجليزية).
سيكون هذا الكتاب مجانيا متوفر على موقعي الخاص

http://www.abarry.ws/

و الحمد لله رب العالمين.
المؤلف
2015/8/23

تحليل القرار

تحليل القرار *Decision Analysis* يساعد على أخذ القرار المهم وذلك بإختيار قرار من مجموعة من القرارات البديلة *Alternatives* الممكنة عندما يكون هناك عدم تأكد *Uncertainity* لما سيحدث مستقبلا.

والهدف هنا هو إيجاد أمثل *Optimal* مدفوع *Payoff* ممكن على شكل معيار قرار *Decision Criterion*.

أحد هذه المعايير قد يكون تعظيم الربح المتوقع *Maximizing Expected Profit* عندما يكون في الإمكان تحديد إحتمالات لذلك.

أو

معيار تعظيم دالة الفائدة أو الجدوى *Maximizing the Utility Function* والتي تستخدم في حالة وجود مخاطر *Risks* في القرار.

جدول تحليل المدفوعات ***Payoff Table Analysis***

يمكن إستخدام جداول تحليل المدفوعات في الحالات التالية:

1- يوجد مجموعة تتكون من عدد محدود من القرارات البديلة المنفصلة *Discrete*.

2- نتيجة القرار دالة لحدث مستقبلي واحد.

وفي جدول القرار يكون:

1- الأسطر تحوي القرارات البديلة الممكنة.

2- الأعمدة تحوي الأحداث المستقبلية الممكنة.

3- الأحداث (وتسمى حالات الواقع *States of Nature* تكون مستبعدة بعضها البعض ولابد من حدوث أحدها *Mutually Exclusive* (أي على الأكثر واحد حدث ممكن من الأحداث يحدث)*and Collectively Exhaustive* (أي على الأقل واحد حدث يحدث).

4- محتويات الجدول هي المدفوعات.

مثال

لدي محمد أحمد *1000* ريال وعليه أن يقرر كيفية إستثمارها لمدة سنة. مستشار خدمات إستثمارية أقترح له *5* إستثمارات ممكنة:

1- الذهب *Gold*.

2- سندات *Bond*.

3- اسهم *Stock*.

4- شهادات إيداع *Certificate of Deposit*.

5- تملك أسهم مشروط *Stock Option Hedge*.

المدفوع من كل إستثمار يعتمد على تصرف السوق (الغير مؤكد أو مضمون) خلال السنة.

محمد أحمد قرر تكوين جدول مدفوعات لمساعدته في أخذ قرار للإستثمار.

ملاحظة: صغر المبلغ المستثمر يجعله مجبر على الإستثمار في شيئ واحد.

حل المثال

1- كون جدول مدفوعات.

2- أختار معيار لصنع القرار وطبقه على جدول المدفوعات.

3- حدد القرار الأمثل.

4- قدر (أحسب) الحل.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
A_1	$p(1,1)$	$p(1,2)$	$p(1,3)$	$p(1,4)$	p_1
A_2	$p(2,1)$	$p(2,2)$	$p(2,3)$	$p(2,4)$	p_2
A_3	$p(3,1)$	$p(3,2)$	$p(3,3)$	$p(3,4)$	p_3

جدول المدفوعات

- عرف حالات الطبيعة ويجب أن تكون مستبعدة بعضها البعض ولابد من حدوث أحدها.
- حدد البدائل.
- أوجد المدفوع لكل بديل لكل حالات الطبيعة.

Decision Alternativs	*States of Nature*				
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*
Gold	-100	100	200	300	0
Bond	250	200	150	-100	-150
Stock	500	250	100	-200	-600
C/D account	60	60	60	60	60
Stock option	200	150	150	-200	-150

Decision Alternativs					
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*
Gold	-100	100	200	300	0
Bond	250	200	150	-100	-150
Stock	500	250	100	-200	-600
C/D account	60	60	60	60	60
Stock option	200	150	150	-200	-150

تعريف: السيطرة أو الهيمنة *Dominance* بين البدائل:

إذا كانت مدفوعات البديل A_1 عند جميع حالات الطبيعة أكبر من أو تساوي المدفوعات للبديل A_2 يقال أن البديل A_1 يسيطر أو يهيمن على البديل A_2.

في المثال أعلاه خيار تملك أسهم مشروطة يسيطر علية خيار السندات البنكية ولهذا سوف نسقط خيار تملك أسهم مشروطة من الجدول.

معايير إتخاذ القرار *Decision Making Criteria*

تصنيف معايير إتخاذ القرار:

1- **إتخاذ قرار تحت شرط التأكد:** وتوجب معرفة حالات الطبيعة المستقبلية *Future State-of-Nature*.

2- **إتخاذ قرار تحت شرط المخاطرة:** وفيها بعض العلم عن إحتمالات حدوث حالات الطبيعة المستقبلية.

3- **إتخاذ قرار تحت شرط عدم التأكد:** لايوجد أي علم عن إحتمالات حدوث حالات الطبيعة المستقبلية.

إتخاذ القرار تحت عدم التأكد *Decision Making Under Uncertainty*

1- معايير القرار تعتمد على موقف أو سلوك متخذ القرار للحياة.

2- المعايير تشمل التالي:

- معيار أعظم الأصغر *Maximin* وتعكس التشائم أو التحفظ.
- معيار ندم تصغير الأعظم *Minimax Regret* وتعكس التشائم أو التحفظ أيضا.
- معيار تعظيم الأعظم *Maximax* وتعكس التفائل والإندفاع.
- مبدأ عدم كفاية التفكير أو المنطق *Principle of Insufficient Reasoning* وفيه لاتوجد معلومات عن إمكانيات حدوث أي من حالات الطبيعة.

إتخاذ القرار تحت عدم التأكد: معيار *Maximin*

يعتمد هذا المعيار على سيناريو أسوأ حالة *Worst-Case Scenario*

- ويناسب كل من صانع القرار المتشائم والمحافظ.

- صانع القرار المتشائم يعتقد أن أسوء حالة ممكنة سوف تحدث.

- صانع القرار المحافظ يتمنى ضمان أقل ربح ممكن.

- لإيجاد أفضل قرار:

1- سجل أقل مدفوع على جميع الحالات لكل قرار.

2- حدد القرار الذي يعظم "أقل مدفوع".

Decision Alternativs	*States of Nature - The Maximum Criterion*					*Minimum*
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*	*Payoff*
Gold	-100	100	200	300	0	-100
Bond	250	200	150	-100	-150	-150
Stock	500	250	100	-200	-600	-600
C/D account	60	60	60	60	60	60

معيار *Maxmin* بإستخدام صفحات النشر

معيار *Maxmin* بإستخدام صفحات النشر

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Minimum	
4	Gold	-100	100	200	300	0		-100	Gold
5	Bond	250	200	150	-100	-150		-150	Bond
6	Stock	500	250	100	-200	-600		-600	Stock
7	CD Acc	60	60	60	60	60		60	CD Acc
8									
9									
10	Maximin Payoff	60							
11	Maxmin Decision	CD Acc							

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Minimum	
4	Gold	-100	100	200	300	0		=MIN(B4:F4)	=A4
5	Bond	250	200	150	-100	-150		=MIN(B5:F5)	=A5
6	Stock	500	250	100	-200	-600		=MIN(B6:F6)	=A6
7	CD Acc	60	60	60	60	60		=MIN(B7:F7)	=A7
8									
9									
10	Maximin Payoff	=MAX(H4:H7)							
11	Maxmin Decision	=VLOOKUP(MAX(H4:H7),H4:I7,2,FALSE)							
12									

إتخاذ القرار تحت عدم التأكد: معيار *Minimax Regret*

معيار *Minimax Regret*:

1- هذا المعيار يناسب كل من إتجاهات صانعي القرار المتشائم و المحافظ.

2- يعتمد جدول المدفوعات على الفرصة المفقودة *"Lost Opportunity"* أو الندم *"Regret"*.

3- صانع القرار يصاب بالندم لفشله في إختيار أفضل قرار.

- لإيجاد قرار أمثل لكل حالة من حالات الطبيعة:

1- حدد أفضل مدفوع على كل القرارات.

2- أحسب الندم *Regret* لكل قرار بديل كالفرق بين ربحه و افضل قيمة ربحية.

- لكل قرار أوجد أعظم ندم *Maximum Regret* على جميع حالات الطبيعة.

- أختار القرار البديل والذي له أقل أعظم الندم.

عودة لمثال محمد احمد

Decision	*States of Nature - The Payoff Table*				
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*
Gold	-100	100	200	300	0
Bond	250	200	150	-100	-150
Stock	500	250	100	-200	-600
C/D account	60	60	60	60	60

Decision Alternativs	*States of Nature - The Maximum Criterion*				
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*
Gold	600	150	0	0	60
Bond	250	50	50	400	210
Stock	0	0	100	500	660
C/D account	440	190	140	240	0

ملاحظات: يحسب الندم للحالة عند كل قرار كالتالي: الندم للحالة = أعظم قيمة لتلك الحالة - قيمة المدفوع عند القرار

الإستثمار في الأسهم *Stock* لايولد ندم عندما يصعد السوق بشكل كبير.

Decision	*States of Nature - The Payoff Table*				
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*
Gold	-100	100	200	300	0
Bond	250	200	150	-100	-150
Stock	500	250	100	-200	-600
C/D account	60	60	60	60	60

500 - (-100) = 600

Decision Alternativs	*States of Nature - The Regret Table*					*Minimum Regret*
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*	
Gold	-100	100	200	300	0	600
Bond	250	200	150	-100	-150	400
Stock	500	250	100	-200	-600	660
C/D account	60	60	60	60	60	440

الإستثمار في الذهب يولد ندم *600* عند صعود السوق بشكل كبير. أفضل قرار هو الإستثمار في السندات *Bonds* لأنها تعطي أقل أعظم ندم *400*.

Minimax Regret بصفحات النشر

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall			
4	Gold	-100	100	200	300	0			
5	Bond	250	200	150	-100	-150			
6	Stock	500	250	100	-200	-600			
7	CD Acc	60	60	60	60	60			
8									
9	Regret Table								
10									
11		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Maximum	
12	Gold	600	150	0	0	60		600	Gold
13	Bond	250	50	50	400	210		400	Bond
14	Stock	0	0	100	500	660		660	Stock
15	CD Acc	440	190	140	240	0		440	CD Acc
16									
17	Minimax Regret Payoff	400							
18	Minimax Regret	Bond							
19									

	A	B	C	D
1	Payoff Table			
2				
3		Large Rise	Small Rise	No Change
4	Gold	-100	100	200
5	Bond	250	200	150
6	Stock	500	250	100
7	CD Acc	60	60	60
8				
9	Regret Table			
10				
11		Large Rise	Small Rise	No Change
12	Gold	=MAX(B$4:B$7)-B4	=MAX(C$4:C$7)-C4	=MAX(D$4:D$7)-D4
13	Bond	=MAX(B$4:B$7)-B5	=MAX(C$4:C$7)-C5	=MAX(D$4:D$7)-D5
14	Stock	=MAX(B$4:B$7)-B6	=MAX(C$4:C$7)-C6	=MAX(D$4:D$7)-D6
15	CD Acc	=MAX(B$4:B$7)-B7	=MAX(C$4:C$7)-C7	=MAX(D$4:D$7)-D7
16				
17	Minimax Regret Payoff	=MIN(H12:H15)		
18	Minimax Regret	=VLOOKUP(MIN(H12:H15),H12:I15,2,FALSE)		
19				

E	F	G	H	I
Small Fall	large Fall			
300	0			
-100	-150			
-200	-600			
60	60			
Small Fall	large Fall		Maximum	
=MAX(E$4:E$7)-E4	=MAX(F$4:F$7)-F4		=MAX(B12:F12)	=A12
=MAX(E$4:E$7)-E5	=MAX(F$4:F$7)-F5		=MAX(B13:F13)	=A13
=MAX(E$4:E$7)-E6	=MAX(F$4:F$7)-F6		=MAX(B14:F14)	=A14
=MAX(E$4:E$7)-E7	=MAX(F$4:F$7)-F7		=MAX(B15:F15)	=A15

إتخاذ القرار تحت عدم التأكد: معيار *Maximax*

- يعتمد هذا المعيار على أفضل سيناريو ممكن ولهذا فهي تناسب كل من صانع القرار المتفائل والمندفع.

- صانع القرار المتفائل يعتقد أن أفضل ناتج ممكن سوف يحدث دائما بغض النظر عن القرار المتخذ.

- صانع القرار المندفع يبحث عن القرار الذي يعطي أقصى مدفوع (عندما يكون المدفوع ارباح).

- لإيجاد أفضل قرار:

1- أوجد المدفوع الأعظم لكل القرارات البديلة.

2- أختار القرار البديل والذي له أعظم الأعظم للمدفوع.

عودة لمثال محمد احمد

Decision Alternativs	*States of Nature - The Maximax Criterion*					*Minimum*
	Larg rise	*Small rise*	*No change*	*Small fall*	*Large fall*	*Payoff*
Gold	-100	100	200	300	0	300
Bond	250	200	150	-100	-150	200
Stock	500	250	100	-200	-600	500
C/D account	60	60	60	60	60	60

أمثل قرار

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Maximum Payoff	
4	Gold	-100	100	200	300	0		300	Gold
5	Bond	250	200	150	-100	-150		250	Bond
6	Stock	500	250	100	-200	-600		500	Stock
7	CD Acc	60	60	60	60	60		60	CD Acc
8									
9	Maximax	500							
10	Infist in	Stock							

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Maximum Payoff	
4	Gold	-100	100	200	300	0		=MAX(B4:F4)	=A4
5	Bond	250	200	150	-100	-150		=MAX(B5:F5)	=A5
6	Stock	500	250	100	-200	-600		=MAX(B6:F6)	=A6
7	CD Acc	60	60	60	60	60		=MAX(B7:F7)	=A7
8									
9	Maximax	=MAX(H4:H7)							
10	Infist in	=VLOOKUP(MAX(H4:H7),H4:I7,2,FALSE)							

إتخاذ القرار تحت عدم التأكد- مبدأ عدم كفاية الأسباب ***Decision Making Under Uncertainty - The Principle of Insufficient Reason***

هذا المعيار قد يناسب واضع القرار الذي هو غير متشائم وغير متفائل (واقعي).

- يفترض هذا المعيار أن جميع الحالات لها نفس الفرصة في الحدوث.

- طريقة إيجاد قرار أمثل كالتالي:

1- لكل قرار أجمع كل المدفوعات.

2- أختار القرار الذي له أكبر مجموع.

مثال محمد احمد مستخدما مبدأ عدم كفاية المعلومات

- مجموع المدفوعات

1- *600 Gold* ريال

2- *350 Bond* ريال

3- *50 Stock* ريال

4- *300 CD Acc* ريال

- ومعتمدين على هذا المعيار فإن القرار الأمثل هو الإستثمار في الذهب.

إتخاذ القرار تحت عدم التأكد: مبدأ عدم كفاية المعلومات

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Sum of Payoff	
4	Gold	-100	100	200	300	0		500	Gold
5	Bond	250	200	150	-100	-150		350	Bond
6	Stock	500	250	100	-200	-600		50	Stock
7	CD Acc	60	60	60	60	60		300	CD Acc
8									
9	Maximum Payoff	500							
10	Decision	Gold							

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Payoff Table								
2									
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall		Sum of Payoff	
4	Gold	-100	100	200	300	0		=SUM(B4:F4)	=A4
5	Bond	250	200	150	-100	-150		=SUM(B5:F5)	=A5
6	Stock	500	250	100	-200	-600		=SUM(B6:F6)	=A6
7	CD Acc	60	60	60	60	60		=SUM(B7:F7)	=A7
8									
9	Maximum Payoff	=MAX(H4:H7)							
10	Decision	=VLOOKUP(MAX(H4:H7),H4:I7,2,FALSE)							

إتخاذ القرار تحت المخاطرة *Decision Making Under Risk*

- تستخدم تقديرات إحتمالية (إذا وجدت) لكل حدث من أحداث حالات الطبيعة في البحث عن القرار الأمثل.

- لكل قرار نحسب مدفوعه المتوقع *Expected Payoff*.

إتخاذ القرار تحت المخاطرة

معيار القيمة المتوقعة *Expected Value Criterion*

- لكل قرار أحسب المدفوع المتوقع كالتالي:

$$Expected\ Payoff = \Sigma\ (Probability)(Payoff)$$

ويكون الجمع على جميع الحالات

- أختار القرار الذي يعطي أفضل المدفوع المتوقع.

ملاحظة: يسمى هذا المعيار أيضا "القيمة المالية المتوقعة" *Expected Monetary Value* (*EMV*).

القيمة المالية المتوقعة *Expected Monetary Value* (*EMV*)

$$EMV_i = \sum_j r_{ij} p_j$$

r_{ij} : المدفوع من القرار البديل i تحت الحالة j

p_j : إحتمال الحالة j

مثال محمد احمد

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Payoff Table							
2								
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall	Expected Value	
4	Gold	-100	100	200	300	0	100	Gold
5	Bond	250	200	150	-100	-150	130	Bond
6	Stock	500	250	100	-200	-600	125	Stock
7	CD Acc	60	60	60	60	60	60	CD Acc
8	Prior Prob.	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1		
9								
10	Max Expected Val	130						
11	invest in	Bond						

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Payoff Table							
2								
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall	Expected Value	
4	Gold	-100	100	200	300	0	=SUMPRODUCT(B4:F4,$B$8:$F$8)	=A4
5	Bond	250	200	150	-100	-150	=SUMPRODUCT(B5:F5,$B$8:$F$8)	=A5
6	Stock	500	250	100	-200	-600	=SUMPRODUCT(B6:F6,$B$8:$F$8)	=A6
7	CD Acc	60	60	60	60	60	=SUMPRODUCT(B7:F7,$B$8:$F$8)	=A7
8	Prior Prob.	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1		
9								
10	Max Expected Val	=MAX(G4:G7)						
11	invest in	=VLOOKUP(MAX(G4:G7),G4:H7,2,FALSE)						

متي نستخدم القيمة المتوقعة؟

- معيار القيمة المتوقعة يفيد في حالتين:

1- في حالة التخطيط لأمد طويل و حالات إتخاذ القرارات تكرر نفسها.

2- متخذ القرار محايد بالنسبة للمخاطر.

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة *Expected Value of Perfect Information*

الحصيلة *Gain* في العائد المتوقع *Expected Return* والذي نتحصل عليه من المعرفة الأكيدة عن حالات الطبيعة المستقبلية يسمى:

Expected Value of Perfect Information (*EVPI*)

محمد احمد *EVPI*

إذا علم محمد بشكل مؤكد من "إرتفاع كبير في السوق" فإن القرار الأمثل هو الإستثمار في *Stock* وبالمثل لأي حالة اخرى

	A	B	C	D	E	F	G
1	Payoff Table						
2							
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall	EV Calc
4	Gold	-100	100	200	300	0	100
5	Bond	250	200	150	-100	-150	130
6	Stock	500	250	100	-200	-600	125
7	CD Acc	60	60	60	60	60	60
8	max	500	250	200	300	60	
9	Prior Prob	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1	
10	ERPI	271					
11	EV	130					
12	EVPI	141					

	A	B	C	D	E	F	G
1	Payoff Table						
2							
3		Large Rise	Small Rise	No Change	Small Fall	large Fall	EV Calc
4	Gold	-100	100	200	300	0	=SUMPRODUCT(B4:F4,$B$9:$F$9)
5	Bond	250	200	150	-100	-150	=SUMPRODUCT(B5:F5,$B$9:$F$9)
6	Stock	500	250	100	-200	-600	=SUMPRODUCT(B6:F6,$B$9:$F$9)
7	CD Acc	60	60	60	60	60	=SUMPRODUCT(B7:F7,$B$9:$F$9)
8	max	=MAX(B4:B7)	=MAX(C4:C7)	=MAX(D4:D7)	=MAX(E4:E7)	=MAX(F4:F7)	
9	Prior Prob	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1	
10	ERPI	=SUMPRODUCT(B8:F8,B9:F9)					
11	EV	=MAX(G4:G7)					
12	EVPI	=B10-B11					

كيف تحسب *EVPI*

$$EVPI = ERPI - EREV$$

Expected Return with Perfect Information :*ERPI*

المدفوع المتوقع من معلومات كاملة

$$ERPI = \sum (probability)(Max\ payoff)$$

Expected Return of the EV Criterion :*EREV*

العائد المتوقع من معيار *EV*

شجرات القرار *Decision Trees*

- جدوال المدفوعات مفيدة فقط في حالة عدم التتابع *Nonsequential* في القرار أو مايسمى المرحلة الوحيدة *Single Stage*.

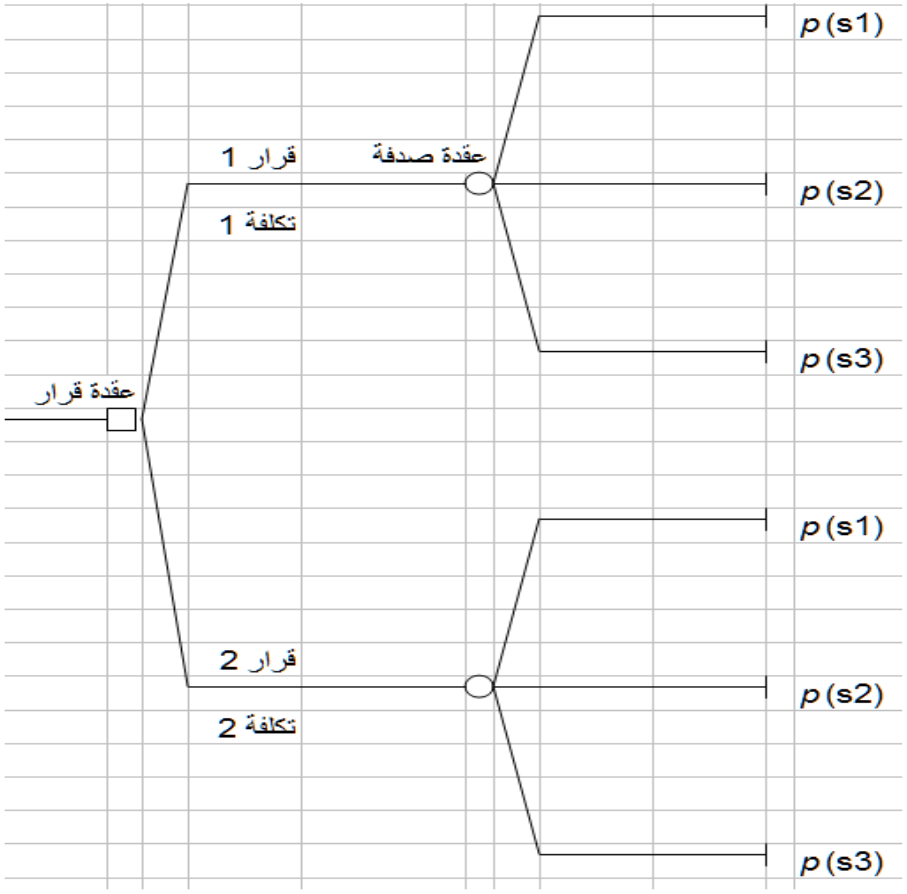
- العديد من القرارات في الحياة العملية تتكون من متتابعة من القرارات التي تعتمد على بعضها البعض.

- شجرات القرار مفيدة في تحليل مايسمى قرارات متعددة المراحل *Multistage Decision Processes*.

خواص شجرة القرار

- شجرة القرار هي تمثيل زمني *Chronological* لعملية القرار.

- تتكون الشجرة من عقد *Nodes* وفروع *Branches*.



- الفرع المتشعب من عقدة قرار يؤدي لقرار بديل ويحوي سعر أو قيمة فائدة.
- الفرع المتشعب من عقدة حالة طبيعة (عشوائية) يتبع لحالة طبيعة معينة ويحوي إحتمال هذه الحالة الطبيعية.
- هناك 3 أنواع من العقد ونوعين من الشعب.
- العقد هي نقاط حيث يجب أن يتم إختيار.
- تقسم العقد إلى:

1- عقدة حدث *Event Node* وهي نقطة تحل عندها عدم التأكد. وتسمى احيانا عقدة مصادفة *Chance Node* وتمثل قيم لايمكن التحكم بها *Uncontrollable* وترسم على شكل دائرة.

2- عقدة قرار *Decision Node* (وشعب القرار) تمثل قيم يمكن التحكم بها *Controllable* وترسم على شكل مربعات.

3- عقدة طرفية (نهائية) *Terminal Node* وتمثل النتيجة النهائية لمجموعة (تركيبة *Combination*) من القرارات والأحداث. والعقد الطرفية هي النقاط النهائية في شجرة القرار وترسم على شكل مثلث أو خط رأسي.

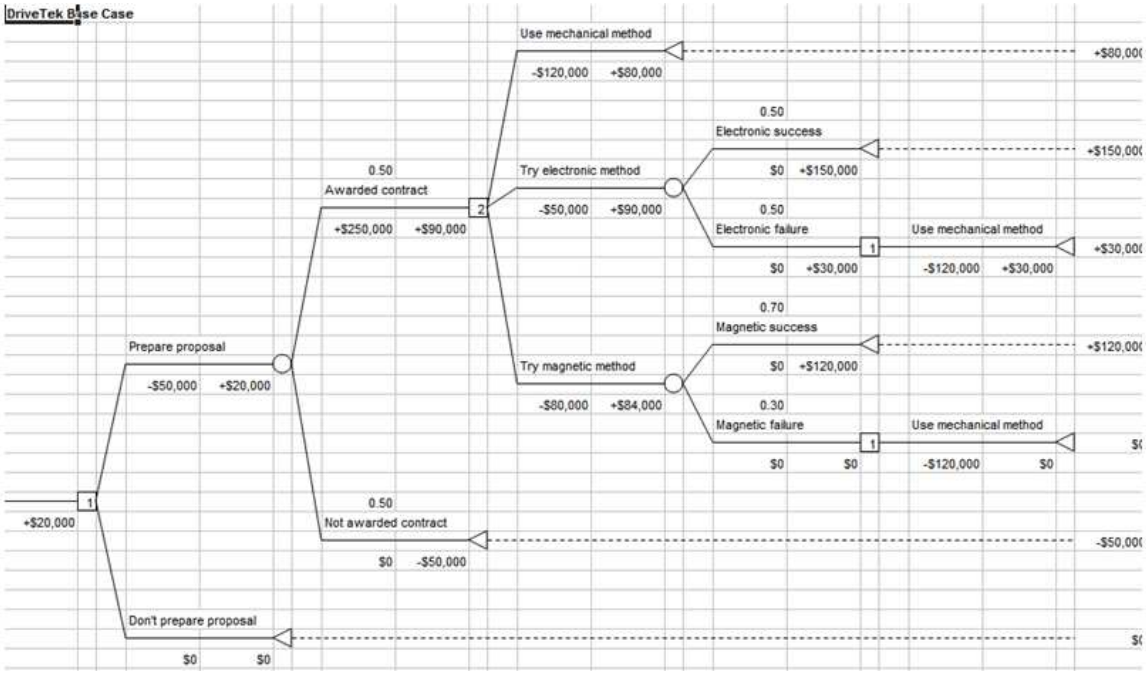
- مجموعة الأحداث وتتشكل من شعب الأحداث وتمتد من عقد الأحداث وكل شعبة تمثل واحد من الأحداث التي قد تتواجد عند تلك النقطة ويجب أن تكون مستبعدة بعضها ولابد من حدوث أحدها *Mutually Exclusive* (أي على الأكثر واحد حدث ممكن يحدث) *and Collectively Exhaustive* (أي على الأقل واحد حدث يحدث). وكل حدث يعطى إحتمال شخصي *Subjective* ومجموع هذه الإحتمالات يجب أن يساوي الوحدة.
- الشعب التي تمتد من عقدة قرار هي شعب قرار *Decision Branch* وكل شعبة تمثل أحد البدائل المتاحة عند تلك العقدة. ومجموعة البدائل يجب أن تكون مستبعدة

بعضها ولابد من حدوث أحدها *Mutually Exclusive* (أي على الأكثر واحد بديل ممكن يحدث)*and Collectively Exhaustive* (أي على الأقل واحد بديل يحدث).

- الشعب التي تمتد من عقدة حدث تسمى شعبة حدث *Event Branch*.

- القيم النهائية *Terminal Values* : كل عقدة نهائية تقترن بقيمة نهائية (وتسمى أحيانا قيمة المدفوع *Payoff Value* أو قيمة العائد *Outcome Value* أو قيمة النقطة النهائية *Endpoint Value*.

الشكل التالي يمثل شجرة قرار



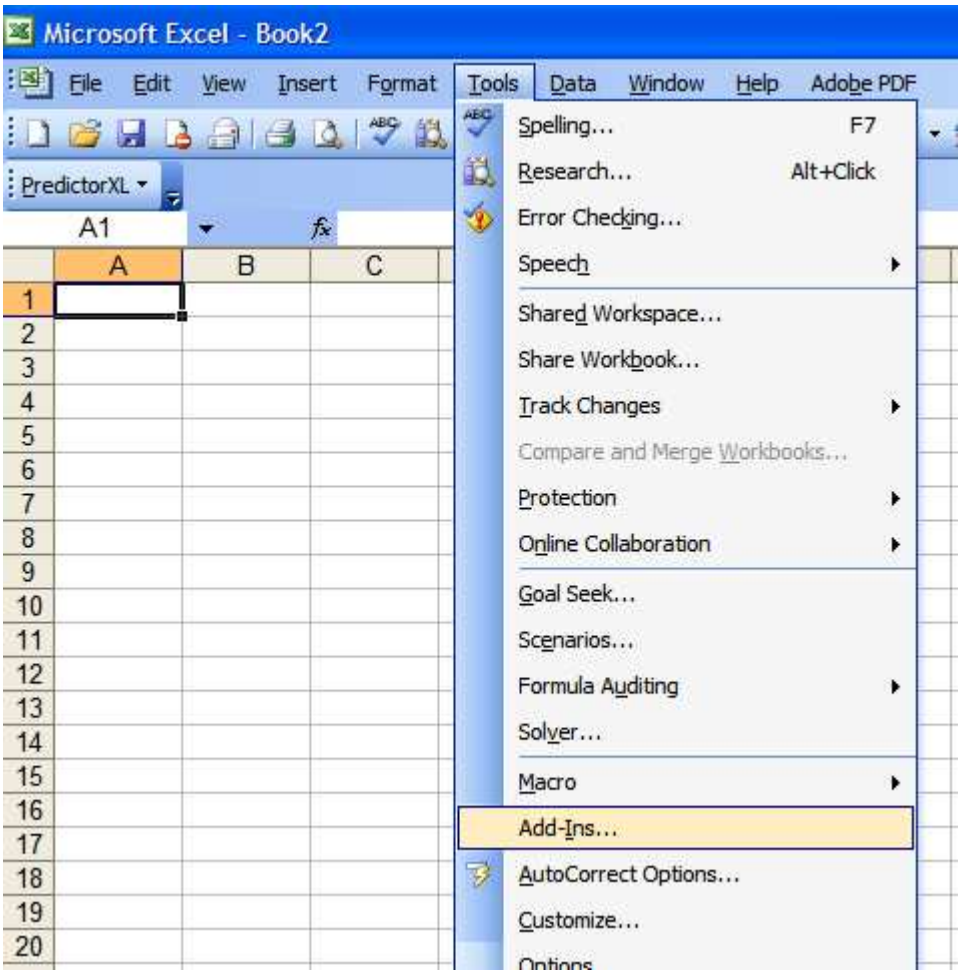
مضاف صفحات النشر *Treeplan*

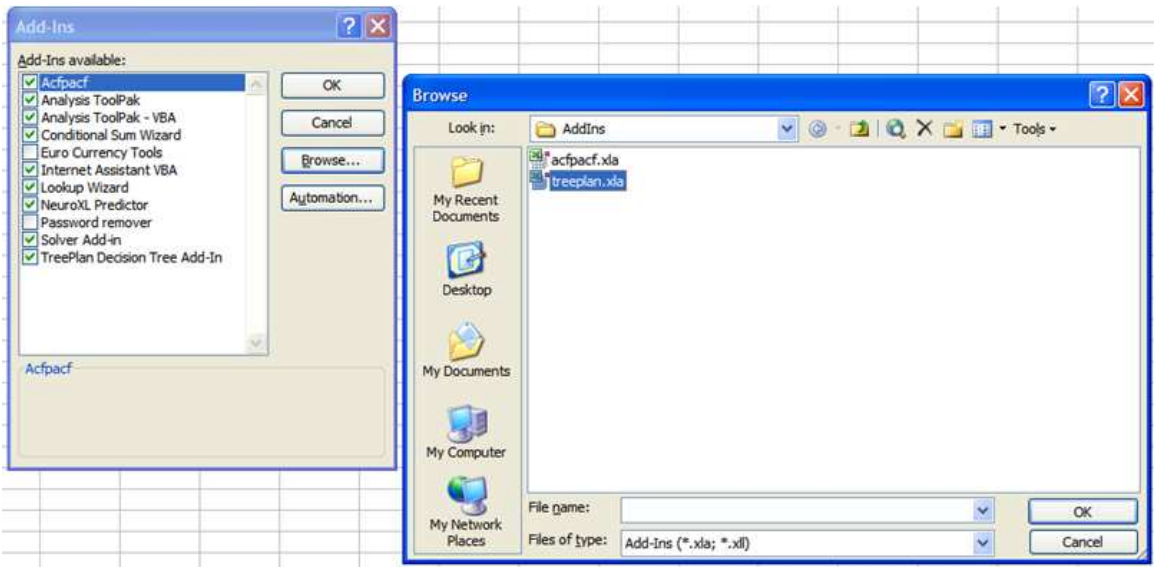
Treeplan Excel Add-In

- *Treeplan* هو مضاف لصفحة النشر *Excel* ويساعد كثيرا في بناء وتحليل نماذج شجرات القرار.

- يمكن إضافته إلى *Excel* بطريقتين:

1- كمضاف دائم عن طريق *Tools => Add-Ins...* ثم:

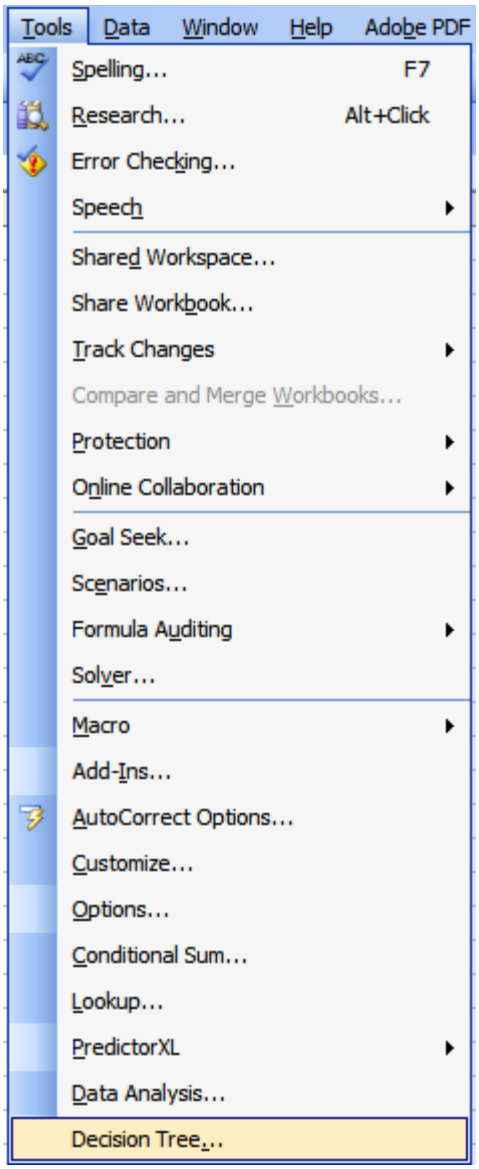




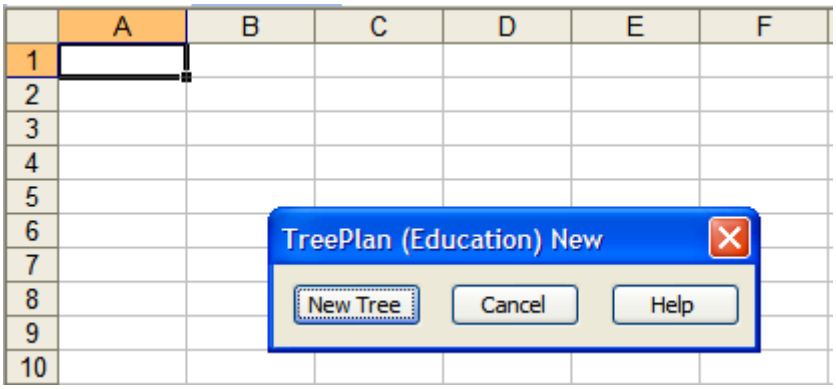
إضافة *Treeplan* لـ *Excel* في الفقرات السابق يكون دائم ويصبح *Treeplan* جزء من *Excel* ولانحتاج لإضافتة عند كل إستخدام.

2- الطريقة الثانية يضاف *Treeplan* لـ *Excel* عند كل إستخدام بتحميله كملف عادي عن طريق *File => Open* ومن ثم نختار المجلد الذي يحوي الملف *treeplan.xla* لاحظ الإمتداد *xla* والذي يعني ملف يضاف لـ *Excel*.

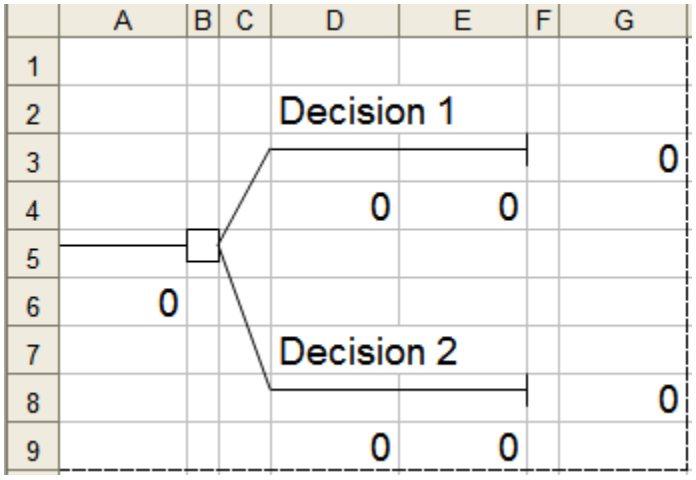
ونقوم بإستخدامه إما عن طريق: *Tools => Decision Tree...*



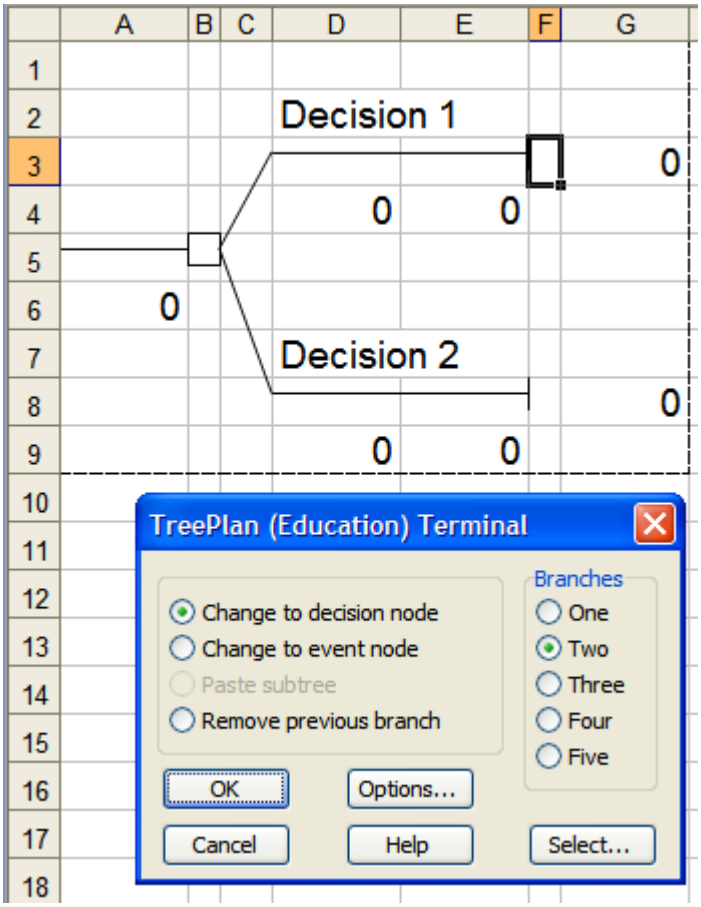
أو عن طريق المفاتيح *Ctrl-t* فتظهر في كلا الحالتين نافذة حوار *Treeplan* :



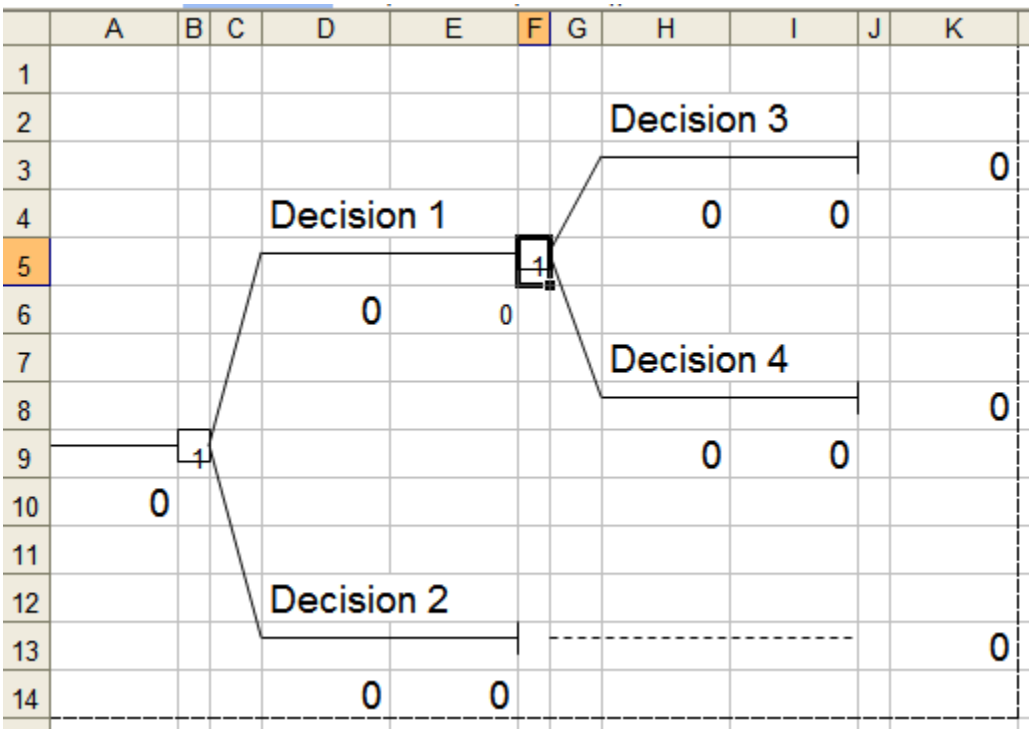
نختار *New Tree* فتظهر:



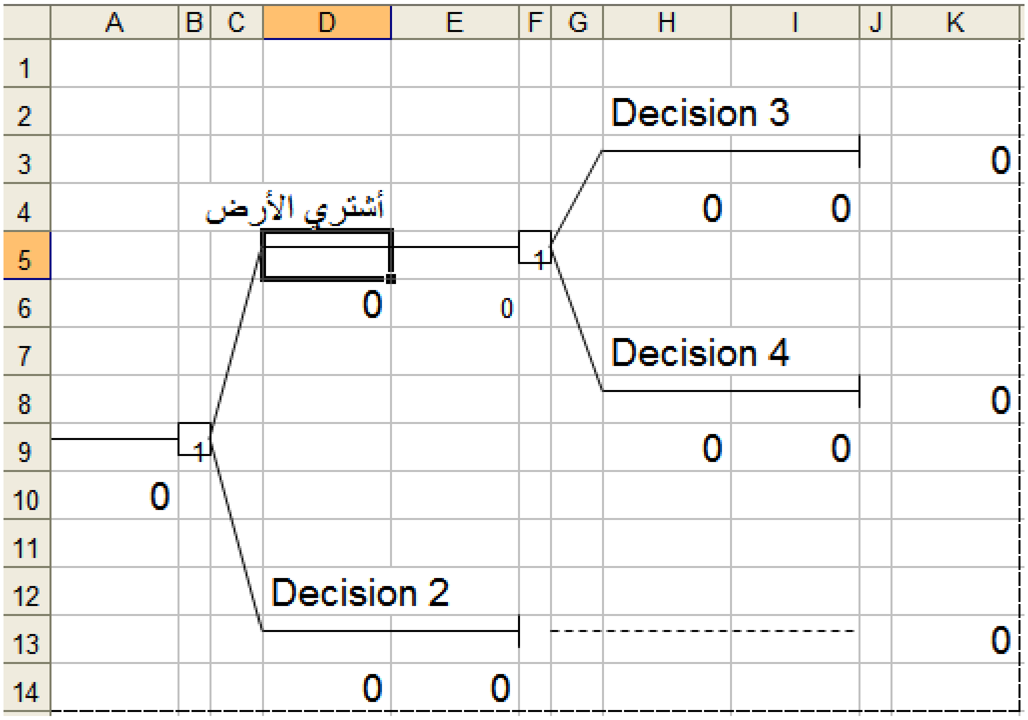
تضاف عقد وفروع بإختيار عقدة ثم *Ctrl-t* نختار نوع العقدة المطلوبة وعدد الشعب المنبثقة منها:



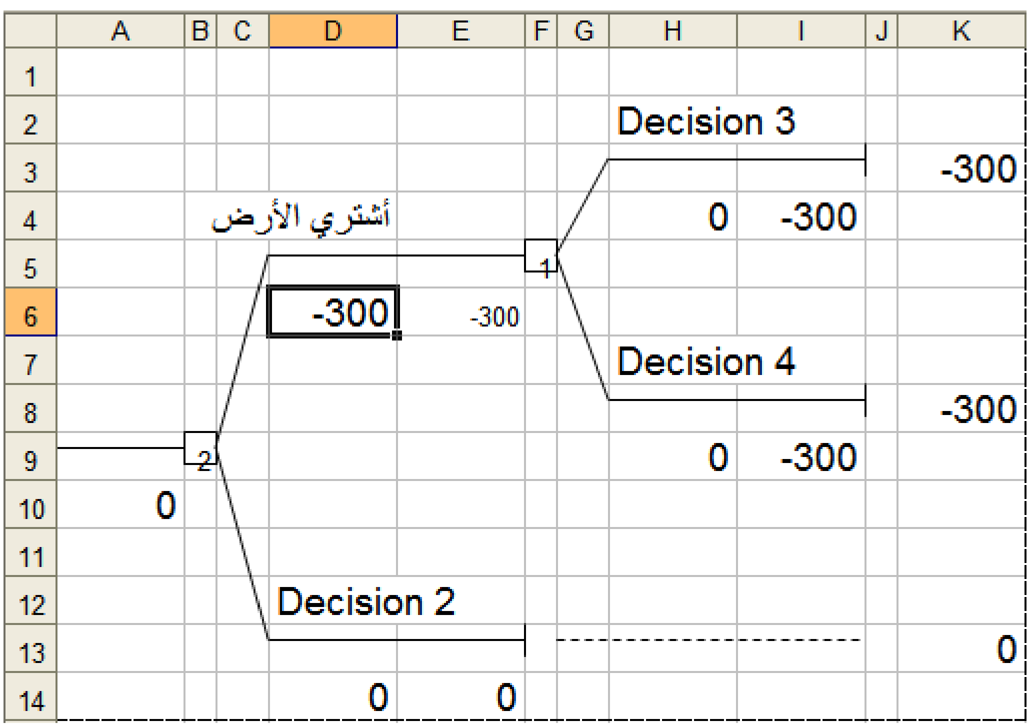
فينتج:



لتغيير القرار (الذي قيمته الإفتراضية *Decision 1* أو *Decision 2* ألخ نختار الخلية ثم نعيد تحريرها



تغيير قيم العقد بالمثل



للحصول على نسخة الطلاب المجانية (التعليمية) للبرنامج *Treeplan* قم بزيارة الموقع *http://www.treeplan.com*

مثال:

شركة بكر جميل للتطوير *BGD*

بكر يخطط لدخول مناقصة تطوير قطعة ارض لبناء تجاري:

- البيانات ذات الصلة بالموضوع :

1- السعر المطلوب للأرض هو *300000* ريال.

2- تكلفة البناء هي *500000* ريال.

3- سعر بيع البناء بعد الإنتهاء *950000* ريال تقريبا.

4- سعر المناقصة *30000* ريال.

- هناك إحتمال *40%* أن ترسى علية المناقصة.

- إذا أشترى بكر الأرض ولم ترسى عليه المناقصة فإنه يستطيع بيع الأرض بمبلغ *260000* ريال.

- لديه الخيار لوضع عربون على الأرض *3* شهور بمبلغ *20000* ريال مما يعطيه فرصة للدخول في المناقصة ومعرفة نتائجها.

- يستطيع بكر الإستعانة بمستشار مناقصات بمبلغ *5000* ريال.

- المستشار يمكن من إعطاء خيارات عن قبول المناقصة كالتالي:

1- $P(\text{Consultant predict approval} \mid \text{approval granted}) = 0.7$

2- $P(\text{Consultant predict denial} \mid \text{approval denied}) = 0.8$

- يرغب بكر في تحديد أفضل إستراتيجية من:

1- أستخدم / لاتستخدم مستشار.

2- كل القرارات الاخرى التي تتبع تسلسليا.

حل مشكلة بكر

- بناء شجرة القرار

1- بداية بكر يواجه مشكلة إستخدام مستشار.

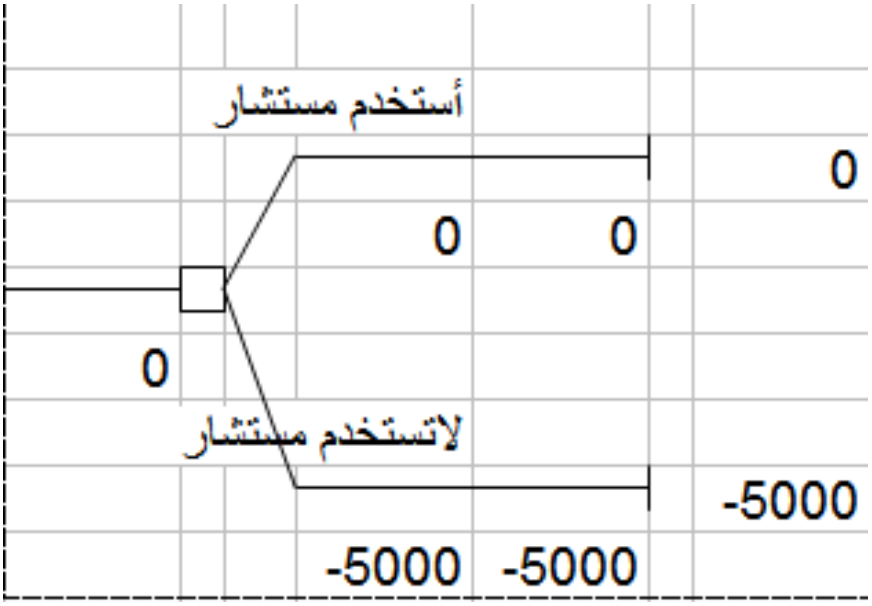
2- بعد إتخاذ قرار في إستخدام مستشار أم لا تتبع القرارات التالية:

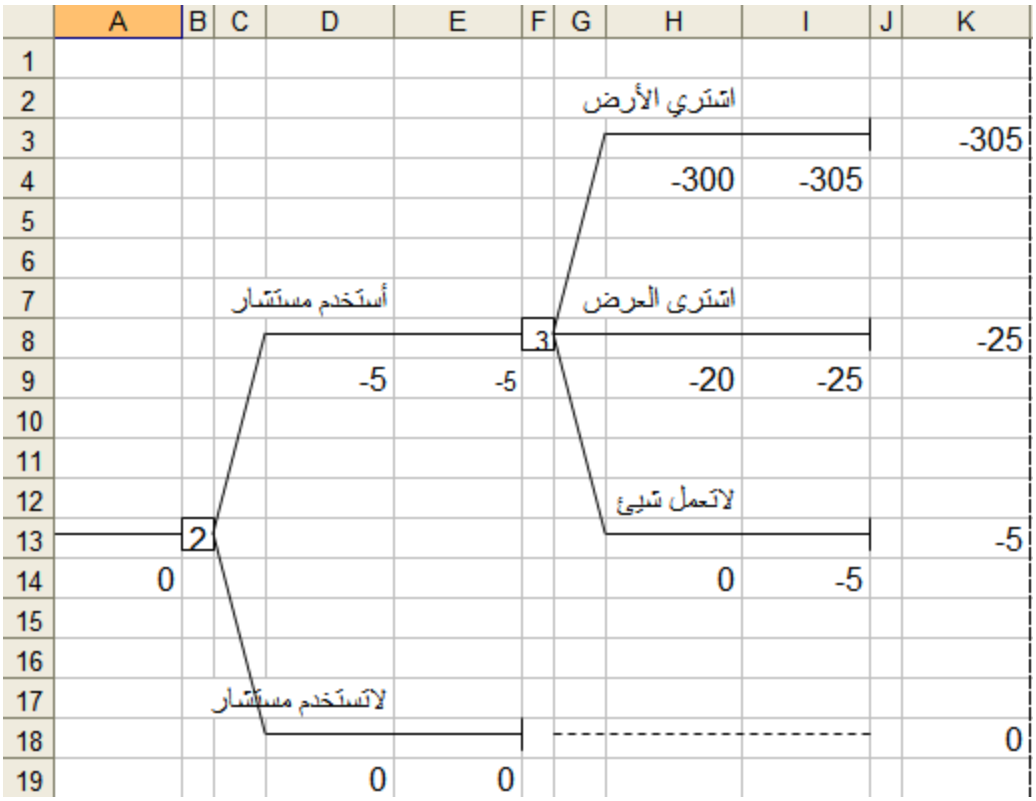
- تقديم طلب الدخول في المناقصة

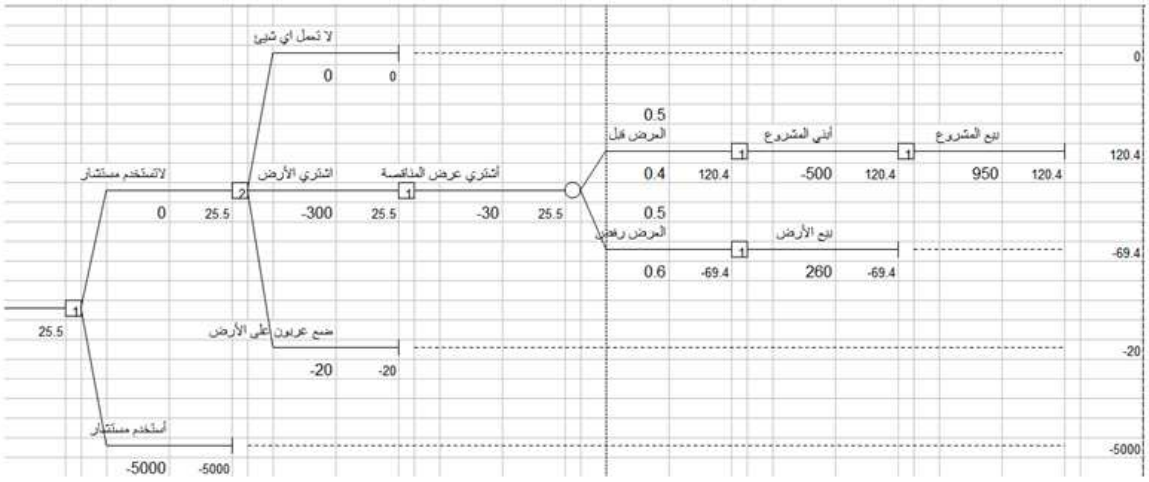
- شراء الطلب

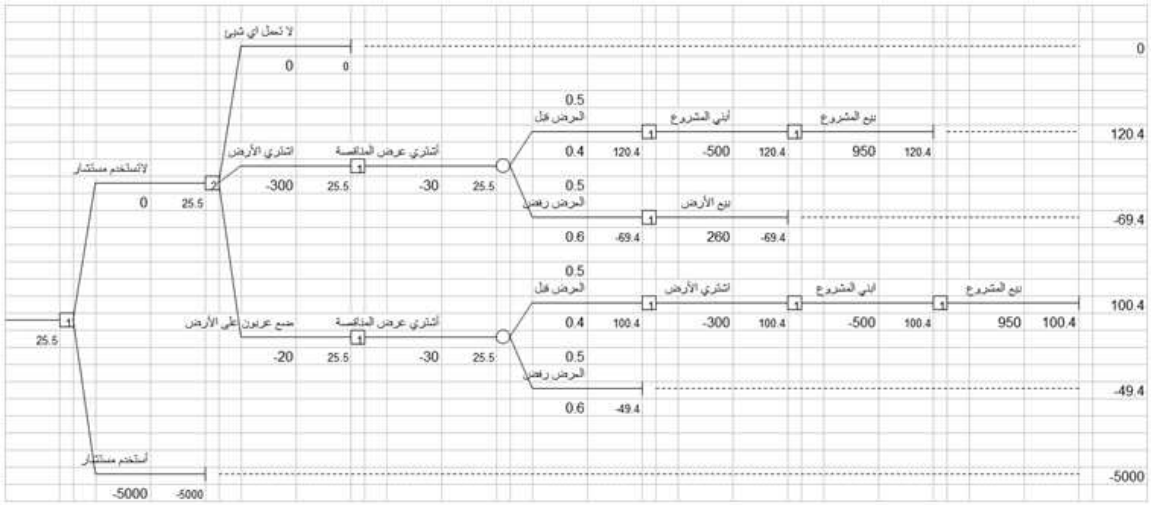
- شراء الأرض

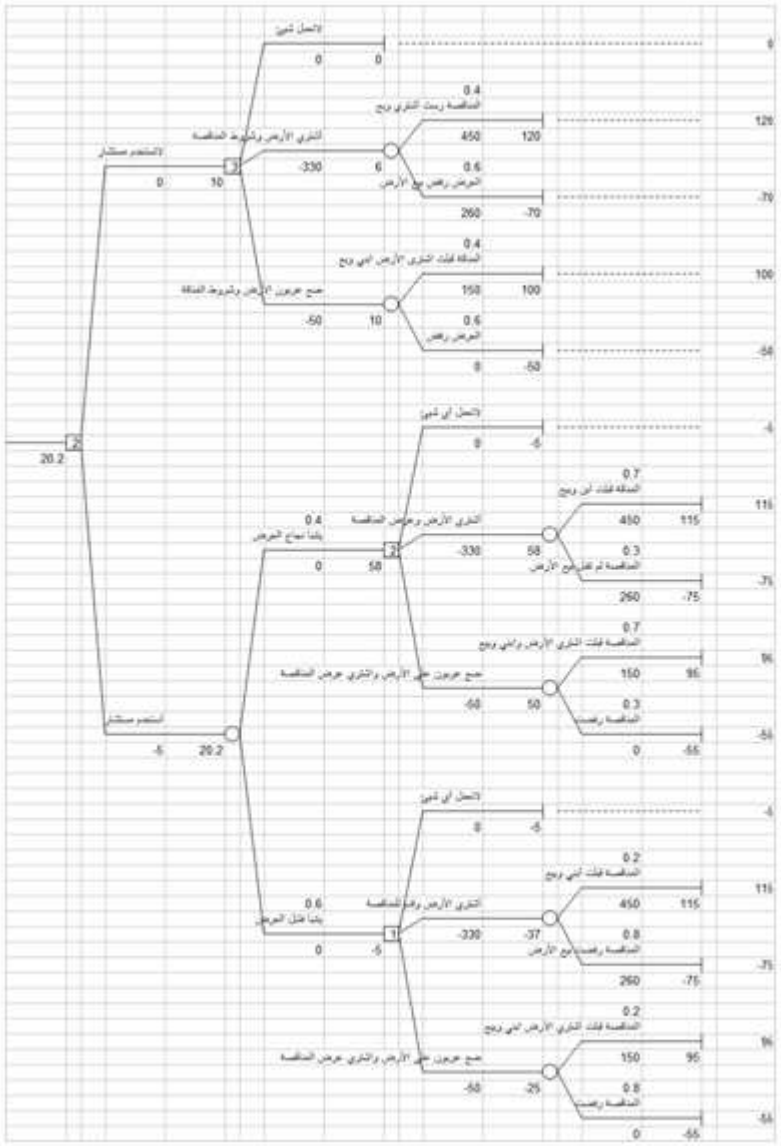
الحل بإستخدام *Treeplan*




اشتري الأرض
-300
-305
-305
أستخدم مستشار
اشترى الحرض
-5
-5
-20
-25
-25
لاتعمل شيئ
0
0
-5
-5
لاتستخدم مستشار
0
0
0


لا تعمل اي شيئ
0
0
0
0.5
العرض قبل
ابني المشروع
بيع المشروع
120.4
0.4
120.4
-500
120.4
950
120.4
لاتستخدم مستشار
اشتري الأرض
أشتري عرض المنافسة
0
25.5
-300
25.5
-30
25.5
0.5
العرض رفض
بيع الأرض
-69.4
0.6
-69.4
260
-69.4
25.5
ضيع عربون على الأرض
-20
-20
-20
أستخدم مستشار
-5000
-5000
-5000


لا تعمل اي شيء
0
0
0
لا تستخدم مستثمر
0
25.5
اشتري الأرض
-300
25.5
اشتري عرض المنافسة
-30
25.5
0.5
العرض قبل
0.4
120.4
أبني المشروع
-500
120.4
بيع المشروع
950
120.4
120.4
0.5
العرض رفض
0.6
-69.4
بيع الأرض
260
-69.4
-69.4
ضع عرون على الأرض
-20
25.5
اشتري عرض المنافسة
-30
25.5
0.5
العرض قبل
0.4
100.4
اشتري الأرض
-300
100.4
ابني المشروع
-500
100.4
بيع المشروع
950
100.4
100.4
0.5
العرض رفض
0.6
-49.4
-49.4
25.5
استخدم مستثمر
-5000
-5000
-5000


20.2
لاتعمل اي شيء
0
0
0
لاتستخدم مستثمر
0
10
اشتري الأرض وشروط المنافسة
-330
6
0.4
المنافسة رست اشتري وبيع
450
120
120
0.6
العرض رفض بيع الأرض
260
-70
-70
ضع عرون الأرض وشروط المنافسة
-50
10
0.4
المنافسة قبلت اشتري الأرض ابني وبيع
150
100
100
0.6
العرض رفض
0
-50
-50
استخدم مستثمر
-5
20.2
لاتعمل اي شيء
0
-5
-5
اشتري الأرض وعرض المنافسة
-330
58
0.7
المنافسة قبلت اشتري وبيع
450
115
115
0.3
المنافسة لم تقبل بيع الأرض
260
-75
-75
0.4
بدأ نجاح العرض
0
58
ضع عرون على الأرض واشتري عرض المنافسة
-50
50
0.7
المنافسة قبلت اشتري الأرض وابني وبيع
150
95
95
0.3
المنافسة رفضت
0
-55
-55
لاتعمل اي شيء
0
-5
-5
اشتري الأرض وعرض المنافسة
-330
-37
0.2
المنافسة قبلت ابني وبيع
450
115
115
0.8
المنافسة رفضت بيع الأرض
260
-75
-75
0.6
بدأ فشل العرض
0
-5
ضع عرون على الأرض واشتري عرض المنافسة
-50
-25
0.2
المنافسة قبلت اشتري الأرض ابني وبيع
150
95
95
0.8
المنافسة رفضت
0
-55
-55

مثال آخر

قررت الرئاسة العامة للطيران المدني بناء مطار جديد يخدم مكة المكرمة. تم الإتفاق على إنشائه على أحد الموقعين A أو B ولكن الإختيار لن يعلن إلا بعد سنة ولهذا فإن تجار الأراضي بدأو في تطوير مخططات قرب هذه الموقعين وأرتفعت أسعار الأراضي هناك. شركة مكة للتطوير قررت بناء فندق ليخدم هذا المطار بعد أن يتم إختيار الموقع. إدارة شراء الأراضي في الشركة عليها مهمة تقرير في أي موقع سيتم شراء أرض لبناء الفندق. الجدول التالي يلخص المعطيات:

ملاحظة: الأسعار بمئات الآف الريالات.

	A	B
سعر الشراء الحالي	18	12
القيمة المستقبلية للتدفق النقدي *Cash Flow* إذا تم إختيار الموقع للمطار وبناء فندق في الموقع	31	23
القيمة المستقبلية للتدفق النقدي إذا لم يتم إختيار الموقع للمطار وبناء فندق في الموقع	6	4

شركة مكة يمكنها شراء أرض في أي من الموقعين أو شراء أرض في كل الموقعين أو عدم شراء أرض (3 قرارات) وعلى إدارة شراء الأراضي تقرير أحدها.

القرارات البديلة:

- أشتري أرض قرب A.
- أشتري أرض قرب B.
- أشتري أرضين قرب الموقعين A و B.

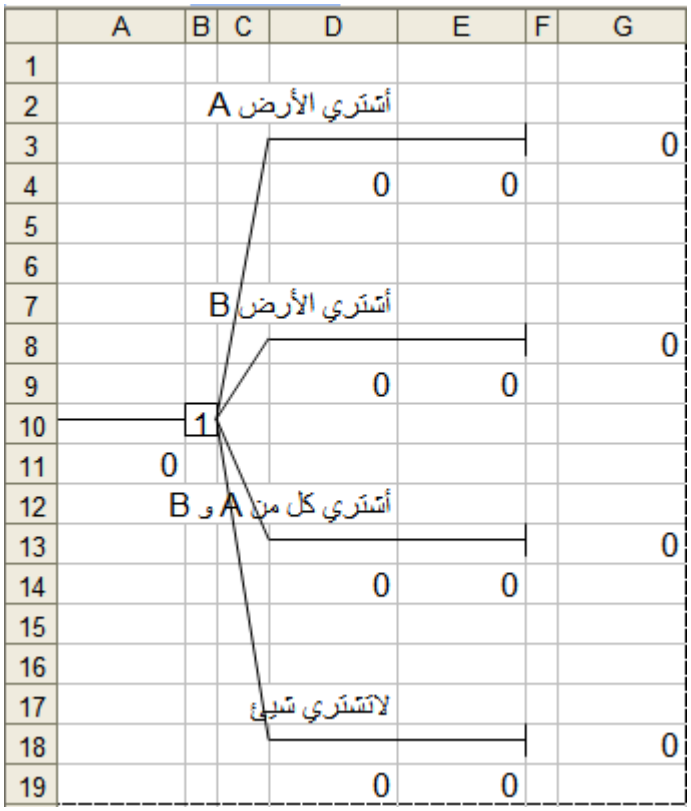
- لاتشتري شيئ.

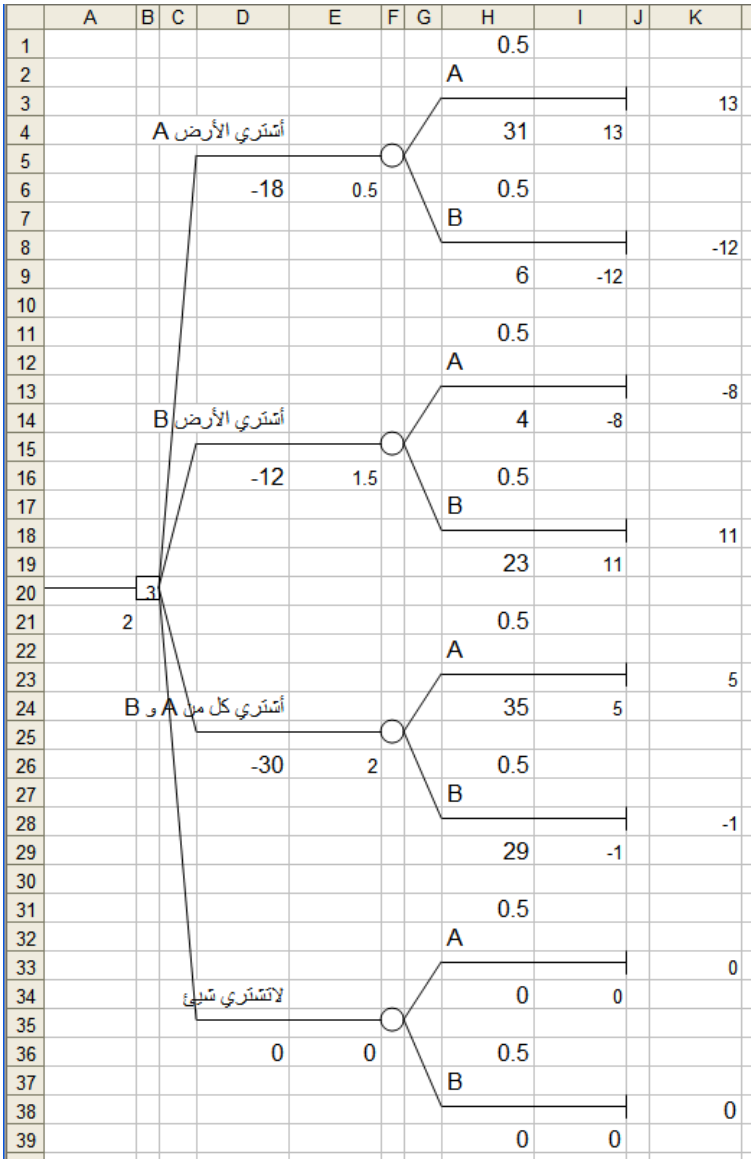
حالات الطبيعة:

- المطار سيبنى قرب *A*.
- المطار سيبنى قرب *B*.

حل شجرة القرار بإستخدام *Treeplan*

- نبدأ بعقدة قرار للقرارات البديلة

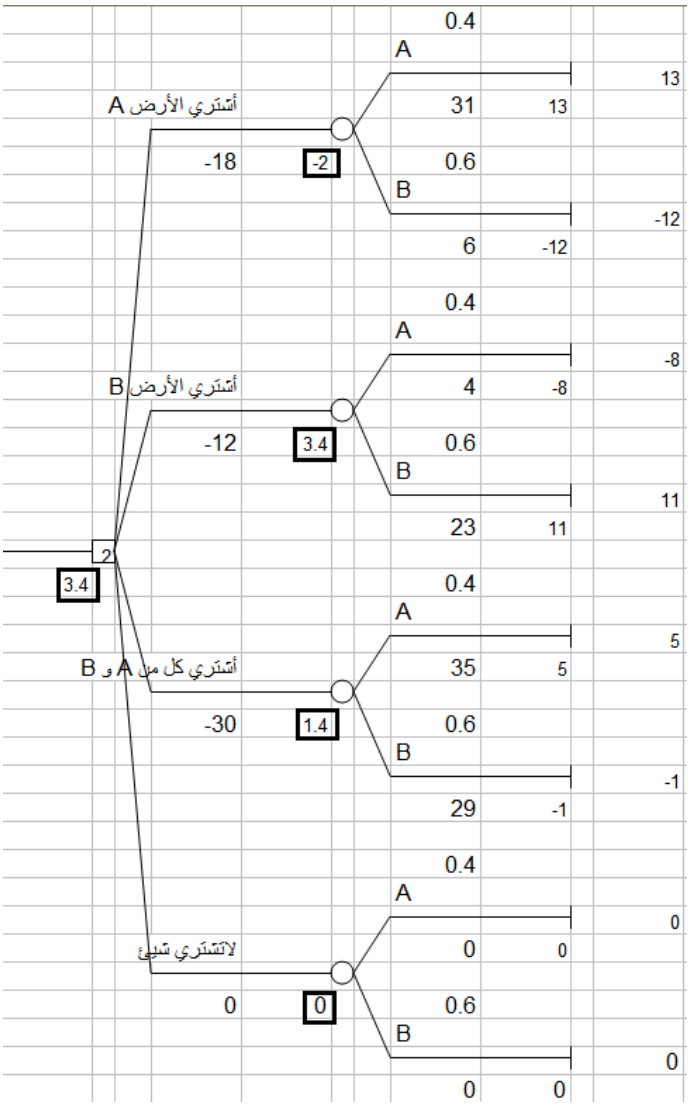



0.5
A
13
أشتري الأرض A
31
13
-18
0.5
0.5
B
-12
6
-12
0.5
A
-8
أشتري الأرض B
4
-8
-12
1.5
0.5
B
11
23
11
3
2
0.5
A
5
أشتري كل من A و B
35
5
-30
2
0.5
B
-1
29
-1
0.5
A
0
لاتشتري شيئ
0
0
0
0.5
B
0
0
0

الرجوع للخلف ***Rolling Back***

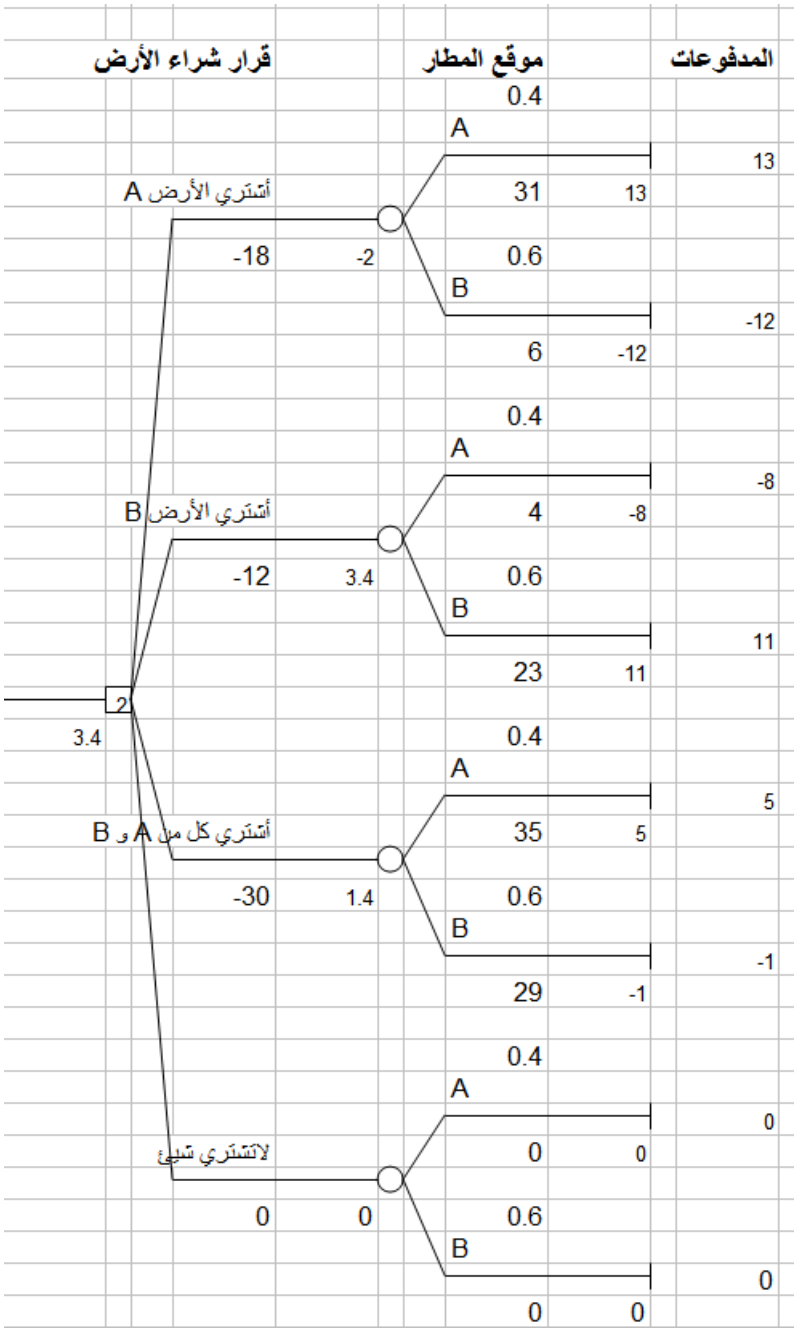
الرجوع للخلف في شجرات القرار يقوم بتعيين أعظم قيمة لمعيار القيمة المالية المتوقعة *Expected Monetary Value* والتي تختصر *EMV* (سبق تعريفها) والذي يستخدم غالبا في شجرات القرار. في الشكل المقابل قيم *EMV* مبينة بالمستطيلات. معيار القرار *EMV* يستخدم إحتمالات لذلك لو علمنا أيضا أن موقع المطار قديختار في المنطقة *A* بإحتمال *0.4* نقوم بإدخال هذه المعلومة وتحصلنا على:

$$Max(EMV) = 3.4$$



لاحظ أن العمود الأخير (عند العقد النهائية) يحوي قيم المدفوعات *Payoff*

القرار :إختيار البديل *2* حيث يؤدي لأعظم *EMV*. لاحظ تغير العقدة البدائية للقيمة *2* وإعطائها قيمة *EMV=3.4*.



جدول المدفوعات

	أشتري A	أشتري B	أشتري A و B	لاتشتري شيئ	p
تشييد المطار عند A	*13*	*-8*	*5*	*0*	*0.4*
تشييد المطار عند B	*-12*	*11*	*-1*	*0*	*0.6*

تمارين

1- من جدول المدفوعات السابق أوجد قيمة *EMV*؟

2- أوجد أعظم مدفوع ممكن لكل قرار *Maximum Possible Payoff* ومن ثم طبق معيار *Maximax*؟

3- أوجد *EVC* و *EVPI*.

توضيح الرجوع للخلف ***Rolling Back***

في عملية الرجوع للخلف نبدأ من المدفوعات من يمين الشجرة ونتجه يسارا (إلى الخلف) ونحسب القيم المتوقعة لكل عقدة حدث *Event Node* فمثلا في الجدول السابق الحدث الممثل بالعقدة *1* له إحتمال *0.4* للحصول على مدفوع *13* و *0.6* إحتمال في خسارة *12* وهكذا للعقدة *1*

$$EMV(node\ 1) = 0.4 \times 13 + 0.6 \times -12 = -2.0$$

$$EMV(node\ 2) = 0.4 \times -8 + 0.6 \times 11 = 3.4$$

$$EMV(node\ 3) = 0.4 \times 5 + 0.6 \times -1 = 1.4$$

$$EMV(node\ 4) = 0.4 \times 0 + 0.6 \times 0 = 0.0$$

لعقد القرار يحسب *EMV* بطريقة مختلفة فمثلا عند العقدة *0* نواجه قرار من *4* قرارات بديلة والتي تؤدي لأحداث لها قيم متوقعة *0, 1.4, 3.4, -2*. عند عقدة قرار نختار البديل الذي يعطي أفضل *EMV*. وهكذا فإن

$EMV(node\ 0) = 3.4$

والذي يتبع من EMV الناتج عن القرار "شراء الأرض في الموقع B.

SilverDecisions

وهو برنامج من المصدر المفتوح Open-Source تم تطويره في قسم تحليل دعم القرار Decision Support Analysis Division في Warsaw School of Economics و يقوم البرنامج بتكوين و تحليل شجرات القرار و يمكن إستخدامه من خلال متصفح للإنترنت أو تحميله على جهاز شخصي و يجب أن يكون برنامج Microsoft Silverlight مثبت مسبقا.

للتثبيت اتبع التالي:

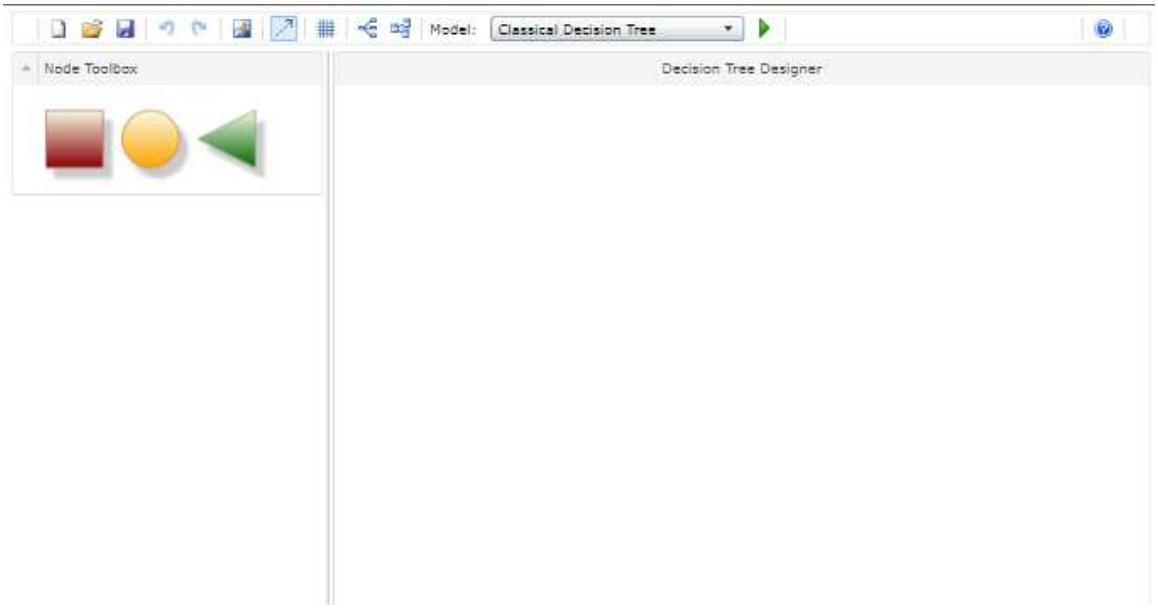
1- ثبت برنامج Microsoft Silverlight من خلال الموقع

http://www.microsoft.com/getsilverlight/Get-Started/Install/Default.aspx

2- إذهب لموقع البرنامج

http://silverdecisions.pl/

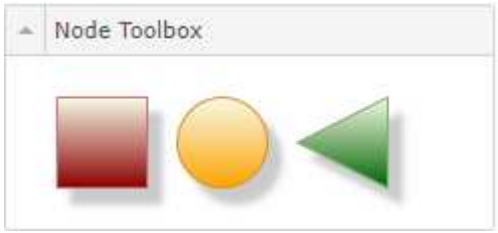
3- إضغط على Run فتظهر صفحة التصميم و التحليل



بالضغط بالفارة اليمنى على اي منطقة فارغة في صفحة التصميم يمكنك تثبيت البرنامج على جهازك الشخصي.

تصميم و تحليل إتخاذ قرار:

1- تحت تصندوق أدوات العقد



توجد ايقونات لجميع انواع العقد

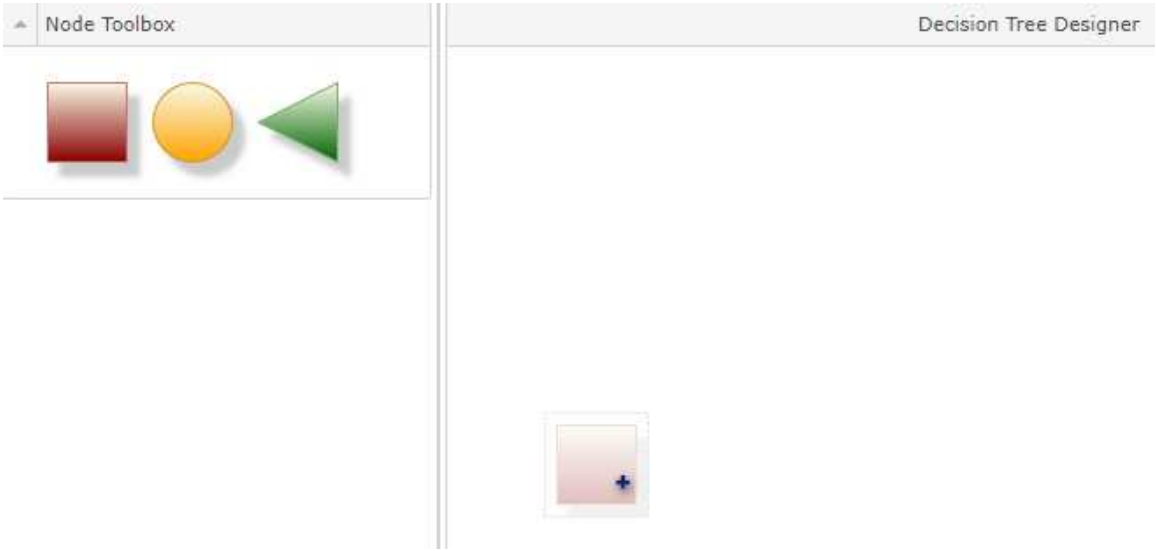
أ- عقدة قرار

ب- عقدة حظ

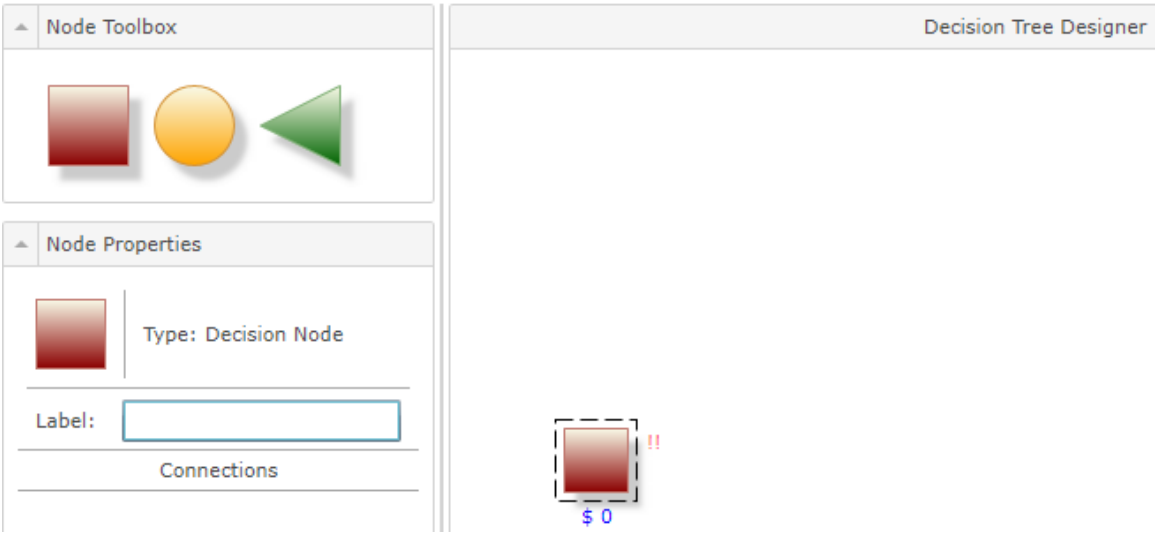
ج- عقدة نهاية

لإختيار عقدة نضغط عليها فتتحدد

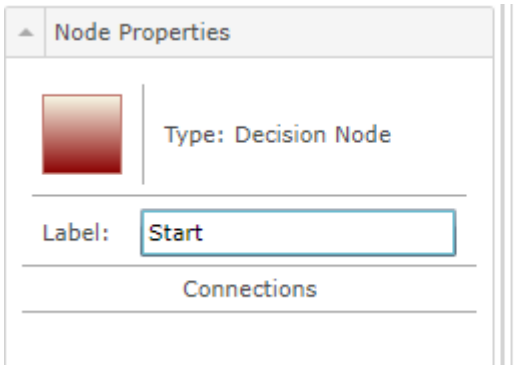
نسحبها لمنطقة Decision Tree Designer



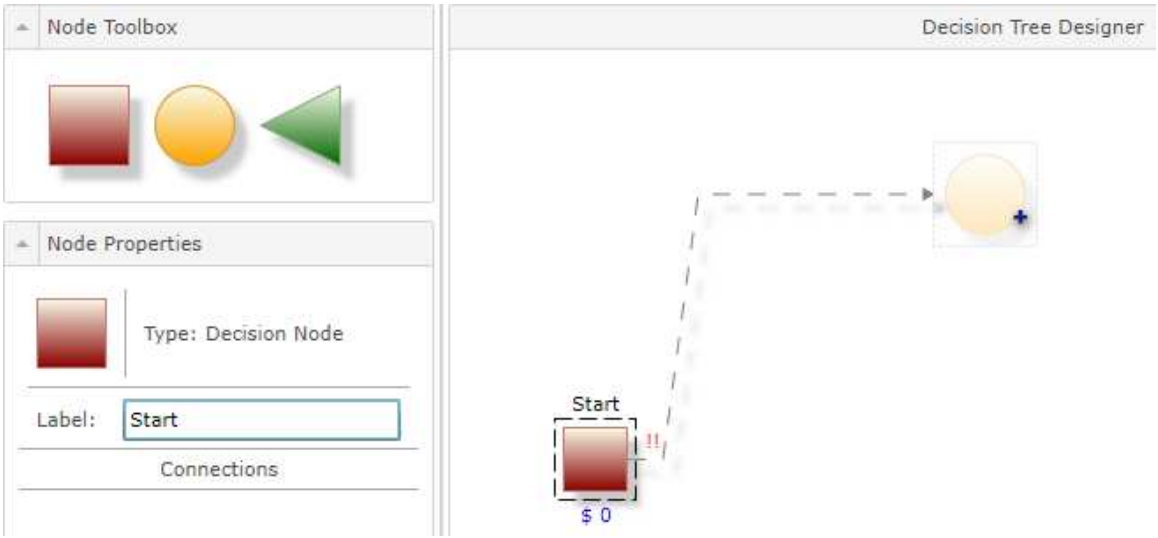
و تظهر في الطرف الأيسر خواص العقدة

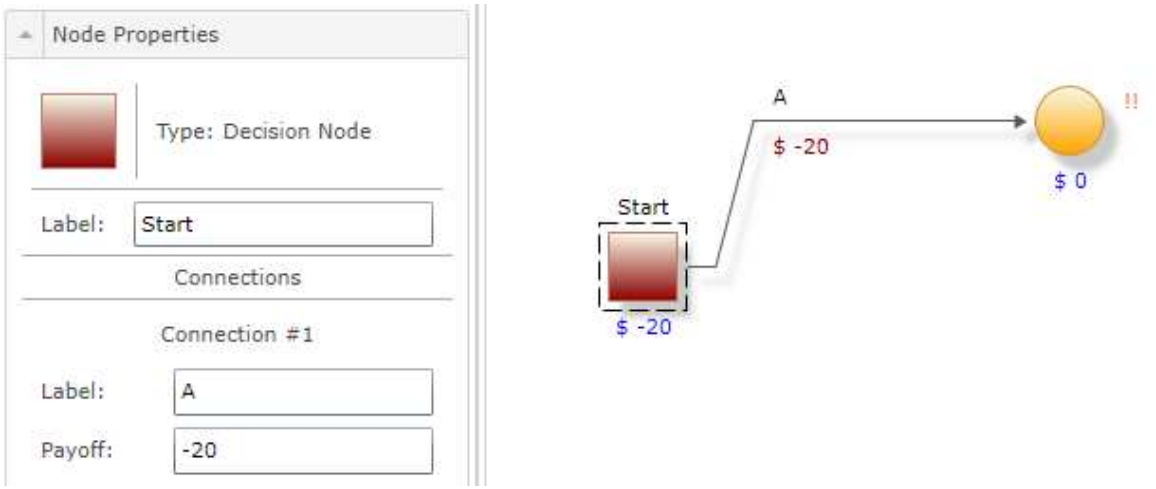


يوجد فقط مكان لتحرير بطاقة إسم Label و إعطاء إسم إختياري و هذا يكون افضل.

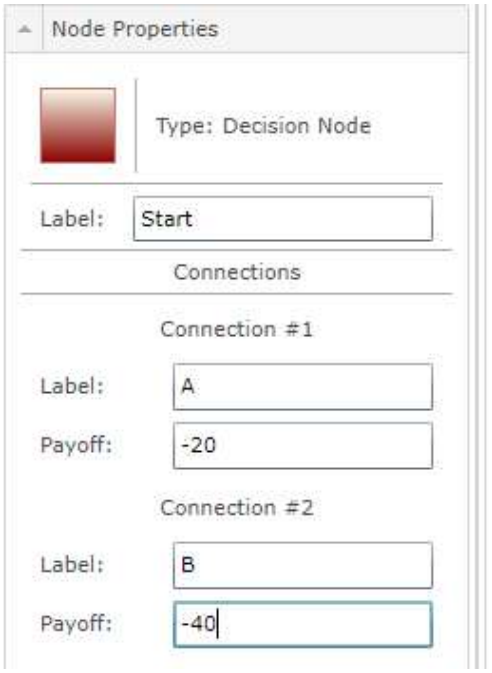


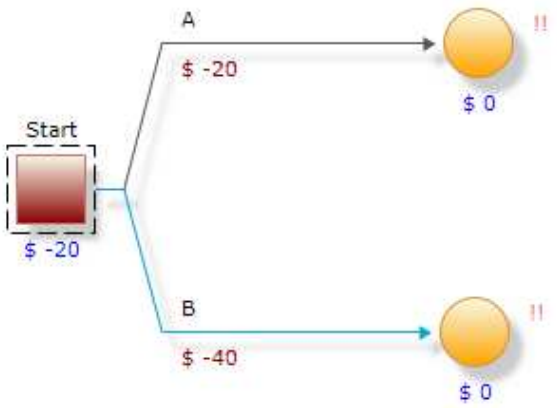
نضيف عقدة حظ بإختيرها وسحبها لمنطقة التصميم



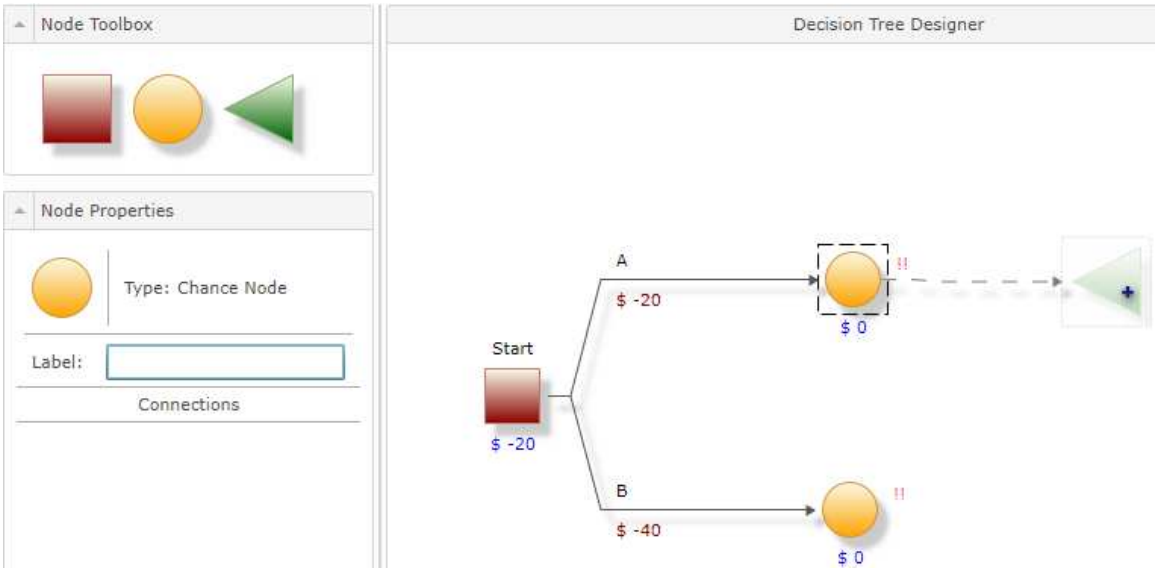


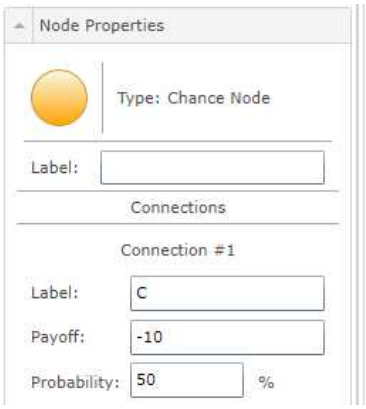
سيظهر تحت التوصيلات رقم كل توصيلة و إسم للتوصيلة و المدفوع عندها.

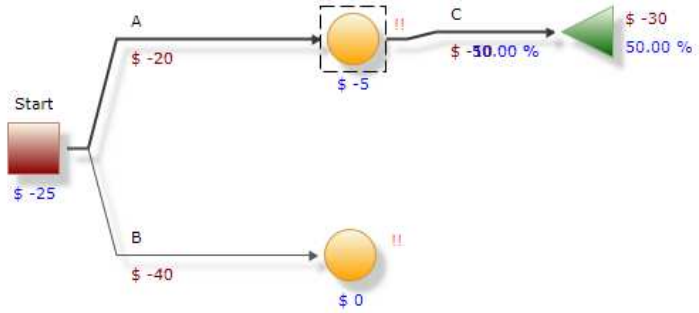




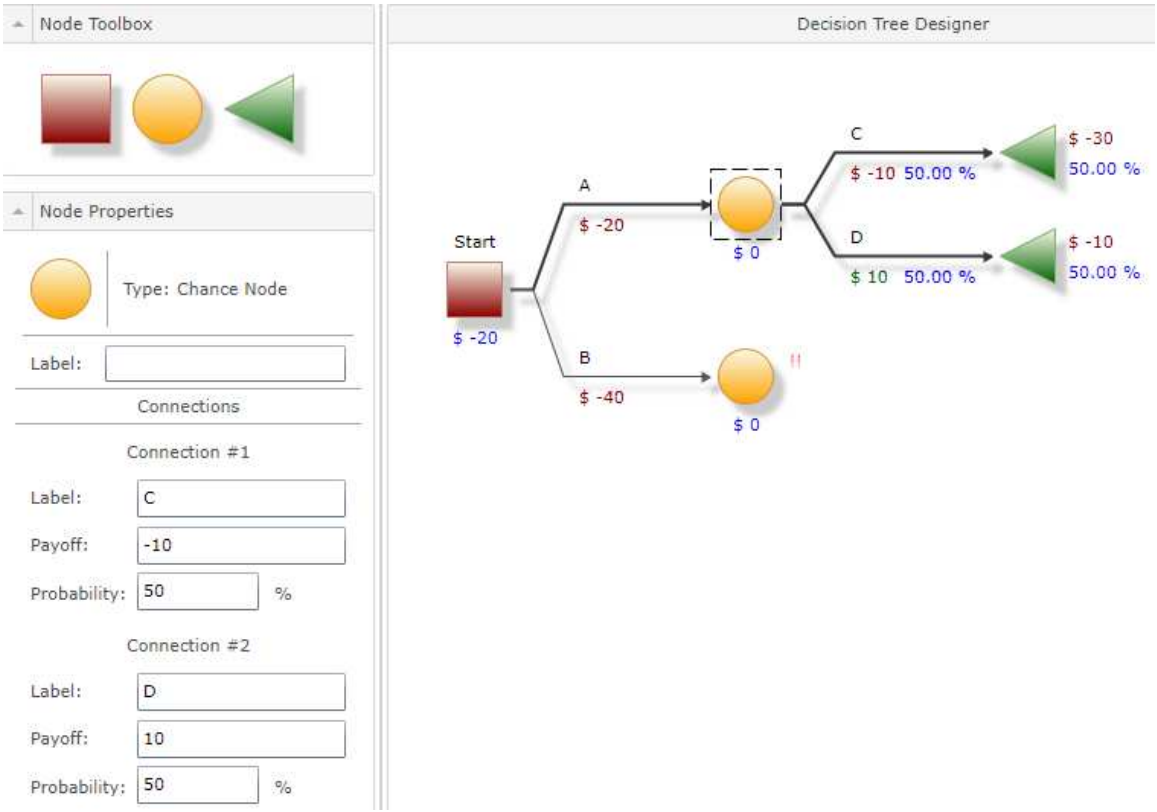
لإضافة عقدة لنهاية عقدة سابقة نختارها ثم نسحب عقدة من صندوق الأدوات



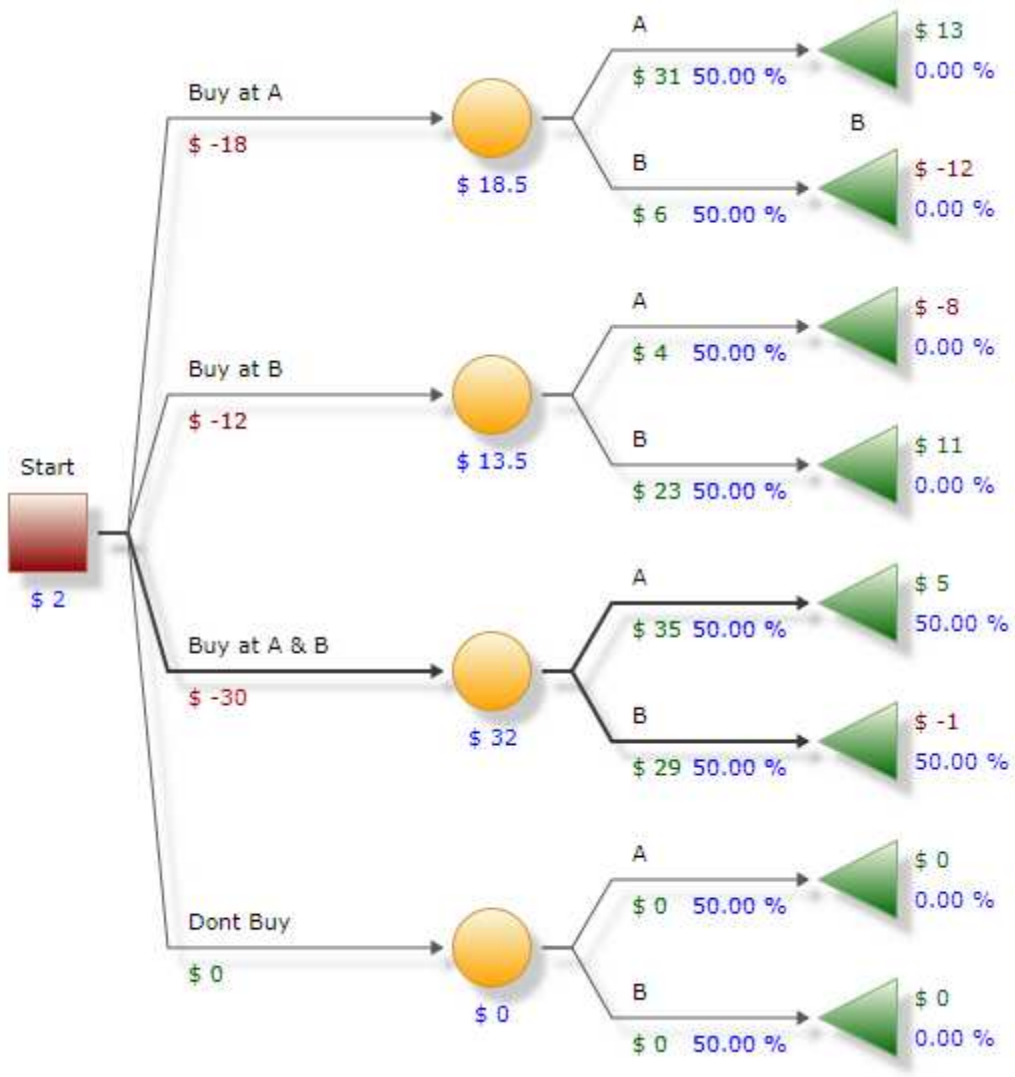




لاحظ من خواص عقد الحظ يوجد صندوق لإدخال الإحتمالات.

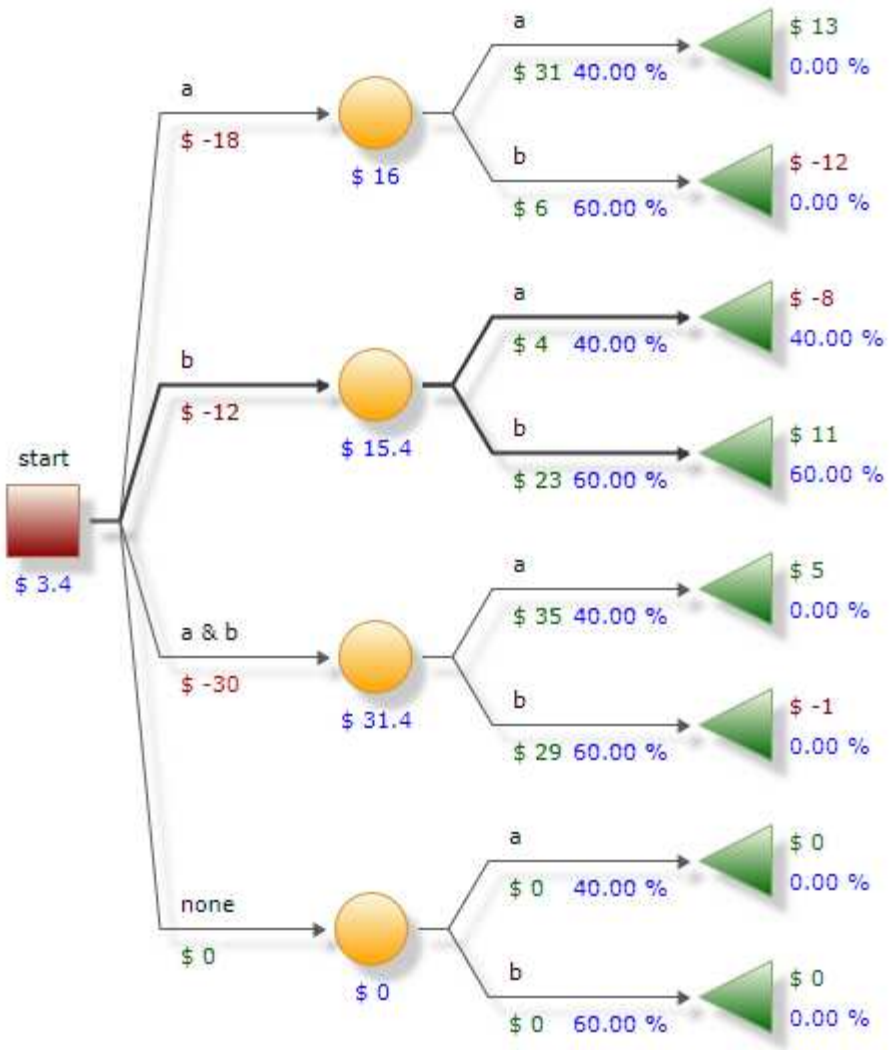


حل المثال السابق:



القرار الذي تم إختياره وهو الذي يظهر بالمسار الموضح بالخط الغليظ Bold lines.

إعادة الحل بتغيير الإحتمالات:


start
$ 3.4
a
$ -18
$ 16
a
$ 31 40.00 %
$ 13
0.00 %
b
$ 6 60.00 %
$ -12
0.00 %
b
$ -12
$ 15.4
a
$ 4 40.00 %
$ -8
40.00 %
b
$ 23 60.00 %
$ 11
60.00 %
a & b
$ -30
$ 31.4
a
$ 35 40.00 %
$ 5
0.00 %
b
$ 29 60.00 %
$ -1
0.00 %
none
$ 0
$ 0
a
$ 0 40.00 %
$ 0
0.00 %
b
$ 0 60.00 %
$ 0
0.00 %

حالات دراسة: *Case Studies*

حالة 1:

لنفترض أن شركة الإتصالات عرضت خطة تملك خط جوال بعقد يدوم 4 أشهر حسب الخطط التالية:

خطة 1: 20 ريال شهريا و 0.4 ريال للدقيقة.

خطة 2: 30 ريال شهريا مع 20 دقيقة مجانا و 0.3 ريال للدقيقة لكل دقيقة إضافية.

خطة 3: 40 ريال شهريا مع 30 دقيقة مجانا و 0.2 ريال للدقيقة لكل دقيقة إضافية.

خطة 4: 60 ريال شهريا مع 100 دقيقة مجانا و 0.1 ريال للدقيقة لكل دقيقة إضافية.

أفترض أن زبونا يريد أخذ أفضل عرض يناسبه والذي قدر مدة إستخدامه للجوال بالإحتمالات التالية:

Time	*Probability*
10 *minutes*	0.20
30 *minutes*	0.20
60 *minutes*	0.30
100 *minutes*	0.20
150 *minutes*	0.10

حدد أي خطة تناسبه بحيث تعطي أقل تكلفة شهرية متوقعة؟

الحل:

حساب جدول المدفوعات:

تحت الخطة 1 و 10 دقائق = 20 ريال للشهر + 0.4 X10 =24 ريال

تحت الخطة 1 و 30 دقائق = 20 ريال للشهر + 0.4 X30 =32 ريال

تحت الخطة 1 و 60 دقائق = 20 ريال للشهر + 0.4 X60 =44 ريال

تحت الخطة 1 و 100 دقائق = 20 ريال للشهر + 100X 0.4 =60 ريال

تحت الخطة 1 و 150 دقائق = 20 ريال للشهر + 150X 0.4 =80 ريال

تحت الخطة 2 و 10 دقائق = 30 ريال للشهر = 30 ريال (20 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 2 و 30 دقائق = 30 ريال للشهر + 10X 0.3 =33 ريال (20 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 2 و 60 دقائق = 30 ريال للشهر + 40X 0.3 =42 ريال (20 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 2 و 100 دقائق = 30 ريال للشهر + 80X 0.3 =54 ريال (20 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 2 و 150 دقائق = 30 ريال للشهر + 130X 0.3 =69 ريال (20 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 3 و 10 دقائق = 40 ريال للشهر =40 ريال (30 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 3 و 30 دقائق = 40 ريال للشهر =40 ريال (30 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 3 و 60 دقائق = 40 ريال للشهر+ 30 X 0.2 =46 ريال (30 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 3 و 100 دقائق = 40 ريال للشهر+ 70 X 0.2 =54 ريال (30 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 3 و 150 دقائق = 40 ريال للشهر+ 120 X 0.2 =64 ريال (30 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 4 و 10 دقائق = 60 ريال للشهر =60 ريال (100 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 4 و 30 دقائق = 60 ريال للشهر =60 ريال (100 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 4 و 60 دقائق = 60 ريال للشهر =60 ريال (100 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 4 و 100 دقائق = 60 ريال للشهر =60 ريال (100 دقيقة مجانا)

تحت الخطة 4 و 150 دقائق = 60 ريال للشهر+ 0.1 X50 =65 ريال (100 دقيقة مجانا)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Time spent talking during a month						
3	Plan	10	30	60	100	150	Expected cost	
4	1	24	32	44	60	80	=SUMPRODUCT(B4:F4,$B$8:$F$8)	Plan I
5	2	30	33	42	54	69	=SUMPRODUCT(B5:F5,$B$8:$F$8)	Plan II
6	3	40	40	46	54	64	=SUMPRODUCT(B6:F6,$B$8:$F$8)	Plan III
7	4	60	60	60	60	65	=SUMPRODUCT(B7:F7,$B$8:$F$8)	Plan IV
8	Prob.	0.2	0.2	0.3	0.2	0.1		
9								
10	Minimum EC=	=MIN(G4:G7)						
11	Plan =	=VLOOKUP(MIN(G4:G7),G4:H7,2)						

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Time spent talking during a month						
3	Plan	10	30	60	100	150	Expected cost	
4	1	24	32	44	60	80	44.4	Plan I
5	2	30	33	42	54	69	42.9	Plan II
6	3	40	40	46	54	64	47	Plan III
7	4	60	60	60	60	65	60.5	Plan IV
8	Prob.	0.2	0.2	0.3	0.2	0.1		
9								
10	Minimum EC=	42.9						
11	Plan =	Plan II						

حالة 2:

يريد صندوق الطلاب تحديد عدد الحاسبات التي يرغب شرائها لبيعها لطلاب الجامعة. يكلف الحاسب تكلفة الجملة 800 ريال للحاسب ويبيعها الصندوق بمبلغ 1100 ريال للحاسب. يعتقد القائم على الصندوق أن الطلب سيكون بين 1 و 4 حاسبات. أي حاسب لايباع بعد إنتهاء الفصل الدراسي يوضع عليه خصم 50% وسيباع حالا. في حالة نقص عدد الحاسبات عن الطلب سيفقد الصندوق 100 ريال عن كل نقص لحاسب.

كون جدول مدفوعات لهذه المشكلة و أوجد الحل بإستخدام معيار أعظم الأقل *maximin* و معيار أعظم الندم *maximum regret*.

الحل:

جدول المدفوعات:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Demand					
2	Number ordered	1	2	3	4	min	
3	1	300	200	100	0	=MIN(B3:E3)	1
4	2	50	600	500	400	=MIN(B4:E4)	2
5	3	-200	350	900	800	=MIN(B5:E5)	3
6	4	-450	100	650	1200	=MIN(B6:E6)	4
7							
8	Maxmin=	=MAX(F3:F6)					
9	order=	=VLOOKUP(MAX(F3:F6),F3:G6,2)					

	A	B	C	D	E	F	G
1		Demand					
2	Number ordered	1	2	3	4	min	
3	1	300	200	100	0	0	1
4	2	50	600	500	400	50	2
5	3	-200	350	900	800	-200	3
6	4	-450	100	650	1200	-450	4
7							
8	Maxmin=	50					
9	order=	2					

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Demand						
2	Number	1	2	3	4	min		
3	1	300	200	100	0	0	1	
4	2	50	600	500	400	50	2	
5	3	-200	350	900	800	-200	3	
6	4	-450	100	650	1200	-450	4	
7								
8	Maxmin	50						
9	order=	2						
10								
11								
12		Demand						
13	Number	1	2	3	4	max		
14	1	0	400	800	1200	1200	1	
15	2	250	0	400	800	800	2	
16	3	500	250	0	400	500	3	
17	4	750	500	250	0	750	4	
18								
19	minimum regret=		500					
20	buy this number=		3					

إفترض في السؤال السابق أن الطلب على الحاسبات له الإحتمالات التالية

$P(Demand = 1) = 0.30$

$P(Demand = 2) = 0.10$

$P(Demand = 3) = 0.40$

$P(Demand = 4) = 0.20$

ماهو عدد الحاسبات التي تشترى لتعطي أعظم ربح متوقع؟

	A	B	C	D	E	F	G
1		Demand					
2	Number or	1	2	3	4	Expected Profit	
3	1	300	200	100	0	150	1
4	2	50	600	500	400	355	2
5	3	-200	350	900	800	495	3
6	4	-450	100	650	1200	375	4
7	prob.	0.3	0.1	0.4	0.2		
8							
9	Max EP=	495					
10	Buy =	3					

حالة 3:

تفكر شركة الأغذية الخفيفة في إستئجار مساحة لبناء مطعم لها في أحد الأسواق التجارية الحديثة. لدى الشركة 3 صيغ لبناء مطعم كل منها يتطلب مساحة مختلفة. توقع الربح المستحق الحاضر *expected present worth profit* سيكون دالة لمتوسط عدد الزبائن اليومي في السوق التجاري. مدير المشاريع في الشركة حدد المدفوعات لنمذجة هذه المشكلة كالتالي(بالآلاف):

		Average Number of Daily Customers				
		4	8	12	16	20
Restaurant	***A***	100	150	200	200	150
Format	***B***	-200	50	350	400	350
	C	-400	-100	250	500	850

أفترض أن مدير المشاريع يعتقد أن الإحتمالات التالية لمتوسط عدد الزبائن في السوق يمكن الإعتماد عليها:

$P(4) = 0.10,\ P(8) = 0.20,\ P(12) = 0.30,\ P(16) = 0.30$

ماهي صيغة المطعم التي تعطي أعظم توقع للربح المستحق الحالي؟

الحل:

تترك كتمرين.

حالة 4:

حصلت شركة الأجهزة الرياضية حق التوزيع الحصري لأجهزة التزلق على الرمال. يكلف الجهاز الشركة 300 ريال ويباع بسعر 650 ريال كما يوجد 400 ريال اجور تجهيز وشحن من المصنع يجب ان تدفع مهما كانت الكمية المطلوبة. قدرت الشركة ان تكلفة الإعلان للأجهزة هو 50 ريال لكل جهاز. إذا انتهى موسم الإجازة وكانت هناك اجهزة لم تباع فإن أسعارها تخفض بحيث تكون 200 ريال بعد تغطيت تكاليف التسويق. مدير التسويق قدر ان الطلب على الأجهزة سيكون بين 1 و 4 وفي حالة زيادة الطلب على المعروض فإن الشركة تخسر 100 ريال عن كل زبون لم يجد طلبه.

الحل:

نكون جدول المدفوعات كالتالي:

مثلا لو ان الشركة طلبت 3 أجهزة وكان الطلب 2 جهاز فإنها تدفع 1300 ريال للثلاثة أجهزة و بعد بيع 2 جهاز يصفى لها 1200 ريال (2 X (650 - 50)) إضافة إلى 200 ريال للجهاز الثالث والذي يباع في التخفيض وبهذا يصبح الربح الكلي

1,200 + 200 - 1,300 = 100.

		Demand			
		1	2	3	4
	0	0	0	0	0
Number	1	-100	-200	-300	-400
Ordered	2	-200	200	100	0
	3	-300	100	500	400
	4	-400	0	400	800

1) ماهو أمثل قرار تحت معيار *Maxmin*؟

2) لنفترض أن إحتمالات الطلب متساوية لكل حالات الطبيعة فما هو أمثل قرار؟

3) ماهي القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة؟

الحل:

تترك كتمرين.

حالة 5:

شركة الصناعات الكيميائية الوطنية تفكر في توسعة مصنعها بالجبيل لإنتاج مركب كيميائي جديد. تفحص الشركة 3 خطط مختلفة للتوسعة. توسعة بسيطة أو متوسطة أو كبيرة كما يمكنهم عدم التوسعة إطلاقا. الربحية على المدى الطويل تعتمد على نمو الطلب المستقبلي للمركب الكيميائي. جدول المدفوعات التالي يعطي الربحية الممكنة للوقت الحاضر والتي قدرها خبراء الشركة بمئات الآلاف الريالات:

Demand Growth for Chemical

		High	***Medium***	***Low***
	Do Nothing	0	0	0
	Minor	140	130	100
Compound				
Expansion	***Moderate***	150	240	-300
	Major	200	120	-500

1) ما هو أمثل قرار للشركة إذا ارادت تقليل *minimize* اعظم ندم *maximum regret* ؟

2) ما هو أمثل قرار للشركة إذا أستخدمت مبدأ عدم كفاية الأسباب *principle of insufficient reason*؟

3) لنفترض أن خبراء الشركة قدروا الإحتمالات التالية لنمو الطلب على المنتج:

$P(High\ Growth) = 0.20$

$P(Medium\ Growth) = 0.30$

$P(Low\ Growth) = 0.50$

ماهو أعظم ربح متوقع؟

4) لنفترض أن الشركة يمكنها إستشارة شركة خبرة في الصناعات الكيميائية لكي تعطيها رأيها في مستقبل نجاح المنتج. رأي شركة الإستشارات قد يكون موجب أو سالب بالإحتمالات التالية:

$$P(\textit{Expert predicts positive} \mid \textit{High Growth}) = 0.60$$
$$P(\textit{Expert predicts positive} \mid \textit{Medium Growth}) = 0.40$$
$$P(\textit{Expert predicts positive} \mid \textit{Low Growth}) = 0.20$$

ماهو إحتمال انه سيكون هناك نمو قليل إذا كان رأي شركة الإستشارات سالب؟

الحل:

يترك كتمرين.

حالة 6:

وكالة تحسين وبيع سيارات ترغب في شراء بين 1 و 4 سيارات. سعر السيارات يعتمد على الكمية المشتراة كالتالي:

Number of Cars Ordered	Total Cost
1	110,000
2	150,000
3	230,000
4	315,000

الشركة تنوي أن تبيع السيارة بمبلغ 90,000 للواحدة. السيارة التي لاتباع بعد قدم الموديل تباع بالتخفيض بمبلغ 75,000 ريال. إذا كان الطلب اكبر من العدد المتوفر من السيارات فإن الشركة تفقد أرباح كان الممكن الحصول عليها بمبلغ 5,000 للسيارة لكل زبون لم يجد طلبه.

مدير الشركة كون جدول المدفوعات التالي بآلاف الريالات:

		Number of Cars Demanded by Customers			
		1	2	3	4
Number of Cars Purchased	1	-20	-25	-30	-35
	2	15	30	25	20
	3	10	25	40	35
	4	0	15	30	45

1) إذا كان مدير الشركة لايحب إطلاقا المجازفة فما هو عدد السيارات التي يجب شرائها؟

2) من خبرته السابق قدر المدير الإحتمالات التالية للطلب:

Demand	Probability
1	.20
2	.20
3	.30
4	.30

ماهة أمثل قرار بإستخدام معيار القيمة المتوقعة؟

3) فكر مدير الشركة في إستشارة شركة أبحاث تسويقية والتي اعطته الإحتمالات التالية لتفضيل الزبائن لهذا التوع من السيارات:

$P(favorably\ inclined \mid 1\ Cars\ demanded) = 0.20$

$P(favorably\ inclined \mid 2\ Cars\ demanded) = 0.40$

$P(favorably\ inclined \mid 3\ Cars\ demanded) = 0.80$

$P(favorably\ inclined \mid 4\ Cars\ demanded) = 0.90$

إذا أستشار مدير الشركة شركة الأبحاث ووجد أن الزبائن لايفضلوا هذا النوع من السيارات فما هي أمثل كمية يقوم بشرائها مدير الشركة؟

الحل:

يترك كتمرين.

حالة 7:

يرغب مصنع روائح عطرية في تقديم منتج جديد. يوجد لدي المصنع 4 طرق مختلفة لتصنيع هذا المنتج والتي تمتد من إستخدام طريقة موجودة بالمصنع إلى تحويل كامل لموقع بالمصنع لتصنيع هذا المنتج. البحث التسوقي نتج عنه أن الطلب يمكن أن يكون قليل أو متوسط أو كبير. جدول المدفوعات كالتالي:

	State		
Action	*Low*	*Moderate*	*High*
1	200	350	600
2	250	350	540
3	300	375	490
4	300	350	470

الخطوة الاولى في التحليل هو البحث عن البدائل المسيطرة. نلاحظ أن البديل 3 يسيطر على البديل 4 ولهذا نلغي البديل 4 من الجدول.

	State				
Action	*Low*	*Moderate*	*High*	*Min*	*Max*
1	200	350	600	200	600
2	250	350	540	250	540
3	300	375	490	300	490

حيث انه لاتوجد لدينا إحتمالات حدوث أحداث الطبيعة فإنه يمكننا تقييم البدائل بإستخدام

- *MAXIMIN*

- *MAXIMAX*

- *MINIMAX REGRET CRITERIA.*

- *MAXIMIN*

نختار البديل 3 لأنه يعطي أكبر أصغر مدفوع 300 ضد البديل 1 والذي يعطي 200 والبديل 2 والذي يعطي 250.

- *MAXIMAX*

نختار البديل 1 لأنه يعطي أكبر أكبر مدفوع 600 ضد البديل 2 والذي يعطي 540 والبديل 3 والذي يعطي490.

- *MINIMAX REGRET*

لإيجاد هذا المعيار نحسب جدول الندم كالتالي:

لأي بديل i نوجد الندم على مجموعة البدائل $A=\{1,2,3,4\}$

$$l_{ij} = \max_{m \in A}\left(r_{mj}\right) - r_{ij}$$

والذي تعطي:

Action	*State* *Low*	*Moderate*	*High*	*Max Regret*
1	100	25	0	100
2	50	25	60	60
3	0	0	110	110

حسب هذا المعيار نختار البديل 2 لأنه يعطي أقل أعظم ندم 60.

الآن لو كان لدينا إحتمالات عن أحداث الطبيعة

$P(Low) = 0.1$

$P(Moderate) = 0.5$

$P(High) = 0.4$

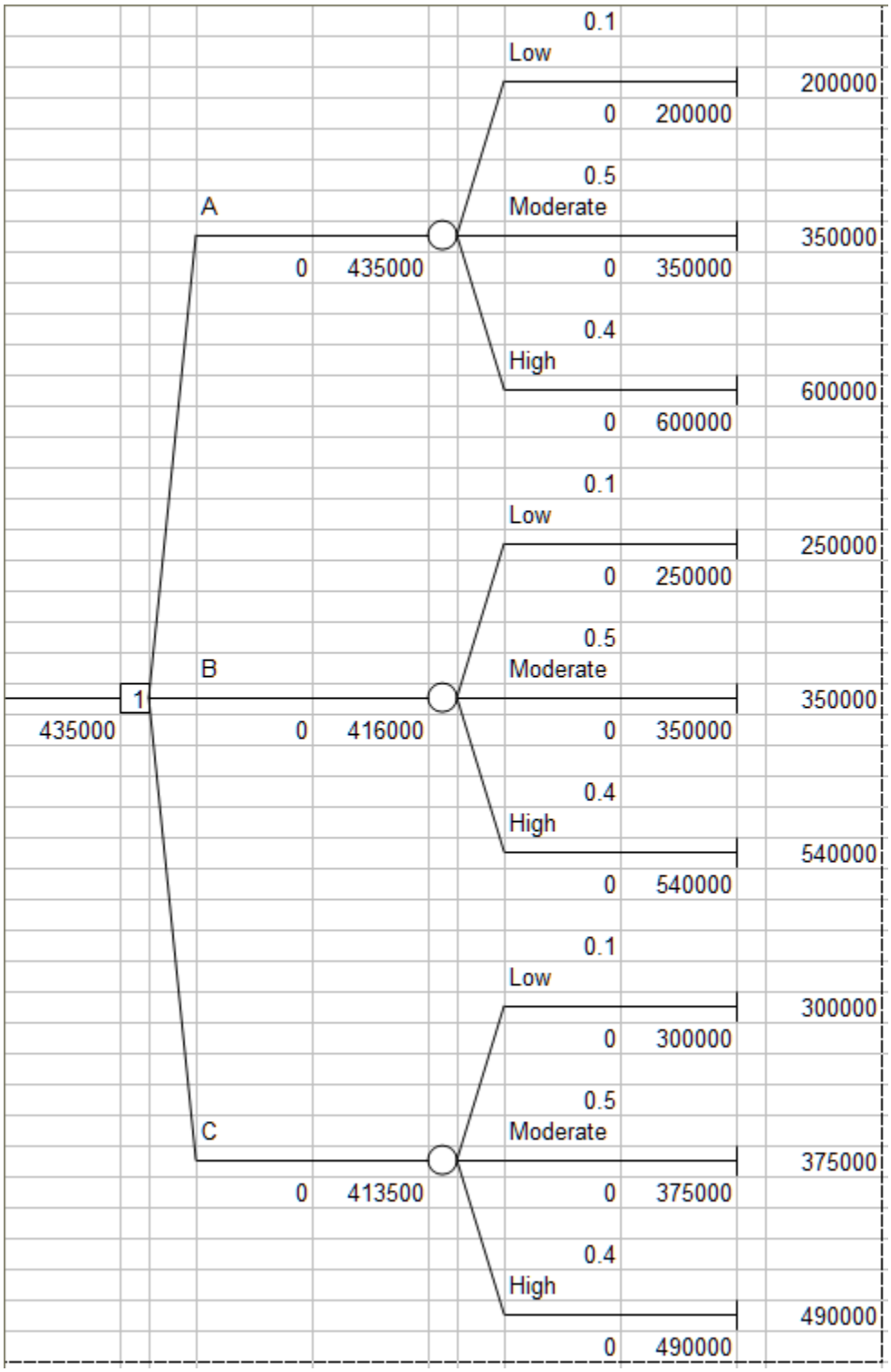
فيمكننا إستخدام معيار القيمة المالية المتوقعة *Expected Monetary Value Criterion* والتي تختار البديل الذي يعطي أكبر قيمة مالية متوقعة. لهذا نعيد بناء جدول المدفوعات

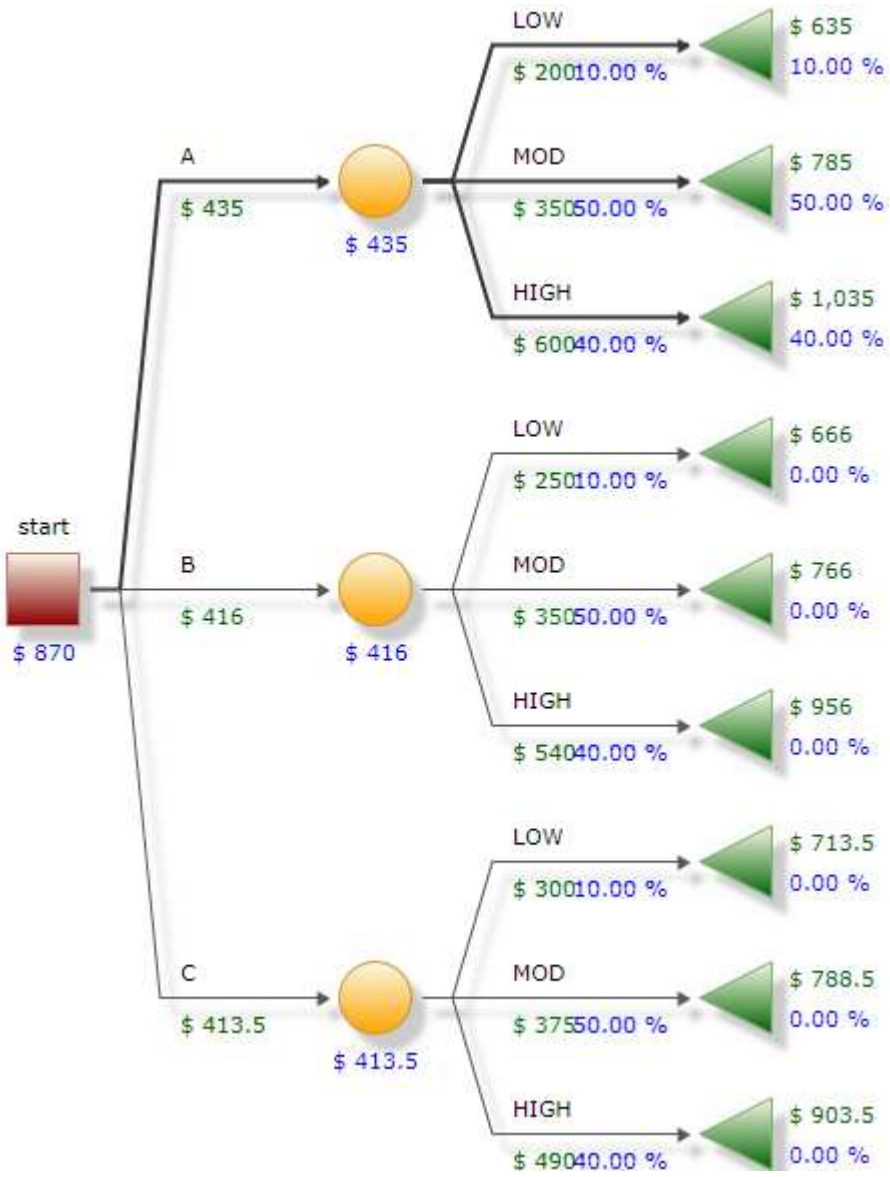
	State	1 (*Low*)	2 (*Moderate*)	3 (*High*)	*Expected Value*
	Probability	0.1	0.5	0.4	
Action	1 (*A*)	200	350	600	435
	2 (*B*)	250	350	540	416
	3 (*C*)	300	375	490	413

أكبر قيمة مالية متوقعة هي للبديل 1 وهي 435 ريال.

الحل بإستخدام شجرة القرار:

ملاحظة: نستخدم رموز للبدائل حتى لانخلط بين القيم العددية و أسماء البدائل في شجرة القرار.


0.1
Low
200000
0
200000
0.5
A
Moderate
350000
0
435000
0
350000
0.4
High
600000
0
600000
0.1
Low
250000
0
250000
0.5
B
Moderate
350000
1
435000
0
416000
0
350000
0.4
High
540000
0
540000
0.1
Low
300000
0
300000
0.5
C
Moderate
375000
0
413500
0
375000
0.4
High
490000
0
490000


start
$ 870
A
$ 435
$ 435
B
$ 416
$ 416
C
$ 413.5
$ 413.5
LOW
$ 200
10.00 %
MOD
$ 350
50.00 %
HIGH
$ 600
40.00 %
$ 635
10.00 %
$ 785
50.00 %
$ 1,035
40.00 %
LOW
$ 250
10.00 %
MOD
$ 350
50.00 %
HIGH
$ 540
40.00 %
$ 666
0.00 %
$ 766
0.00 %
$ 956
0.00 %
LOW
$ 300
10.00 %
MOD
$ 375
50.00 %
HIGH
$ 490
40.00 %
$ 713.5
0.00 %
$ 788.5
0.00 %
$ 903.5
0.00 %

حالة 8:

شركة الأمن الوطني مطلوب منها وضع عروض مفصلة لمناقصة تصميم و تشغيل نظام مراقبة لمكننة صناعة قطع أثاث لشركتين مختلفتين. دفتر العرض الأول (تصميم) يكلف 1000 ريال وفي حالة قبول العرض فإن شركة الأمن الوطني إذا تم إنجاز العمل ستكسب 8000 ريال. العرض الثاني (تشغيل) يكلف دفتر عرضه 1500 ريال ويعطي مكسب 12000 ريال. شركة الأمن الوطني تستطيع الدخول في كلا العرضين إذا شائت ولكن في حالة كسب العرضين معا فإن الشركة لاتستطيع إنجازهم معا وفي هذه الحالة على الشركة الإعتذار عن أحدهم وبهذا تفقد نتيجة الإنسحاب 2000 ريال.

الشركة لديها البدائل التالية:

a_1: *bid on neither contract*

a_2: *bid on the first contract but not the second*

a_3: *bid on the second contract but not the first*

a_4: *bid on both contracts*

كما توجد حالات الطبيعة التالية:

s_1: *both bids rejected*

s_2: *bid on first contract accepted but not the second*

s_3: *bid on second contract accepted but not first*

s_4: *both bids accepted*

لتكوين جدول المدفوعات والتي تحوي على 16 خلية

$r_{ij}, i = 1,2,...,4, \ j = 1,2,...,4$ تحسب من:

المكسب - تكلفة العرض - تكلفة الإنسحاب (إذا وجد)

مثلا للبديل 2 وحالة الطبيعة 3 نجد

0 - 1000 = -1000

الجدول للمدفوعات يصبح كالتالي بآلاف الريالات:

	States	s_1	s_2	s_3	s_4
	a_1	0	0	0	0
Actions	a_2	-1	7	-1	7
	a_3	-1.5	-1.5	10.5	10.5
	a_4	-2.5	5.5	9.5	7.5

نلاحظ عدم وجود حالة مسيطرة.

شركة الأمن الوطني تعتقد أنها تكسب العرض الأول بإحتمال 0.8 والثاني بإحتمال 0.5 وحيث ان العروض قدمت لشركات مختلفة فإن شركة الأمن الوطني تعتقد أن قبولهم او رفضهم العروض مستقلة لهذا فإن

$P[\text{Both are rejected}] = P[\text{First rejected} \cap \text{Second rejected}] = (1-0.8)(1-0.5) = 0.1$

$P[\text{First accepted and second rejected}] = 0.8(1-0.5) = 0.4$

$P[\text{First rejected and second accepted}] = (1-0.8)(0.5) = 0.1$

$P[\text{Both are accepted}] = 0.8(0.5) = 0.4$

وبوضع هذه الإحتمالات في جدول المدفوعات نجد

	States *Probabilities*	s_1 0.1	s_2 0.4	s_3 0.1	s_4 0.4
	a_1	0	0	0	0
Actions	a_2	-1	7	-1	7
	a_3	-1.5	-1.5	10.5	10.5
	a_4	-2.5	5.5	9.5	7.5

Maximin: الشركة لاتقدم اي عرض (لاتعمل اي شيئ) أي البديل a_1

Maximax: الشركة تقدم للعرض الثاني فقط أي البديل a_2

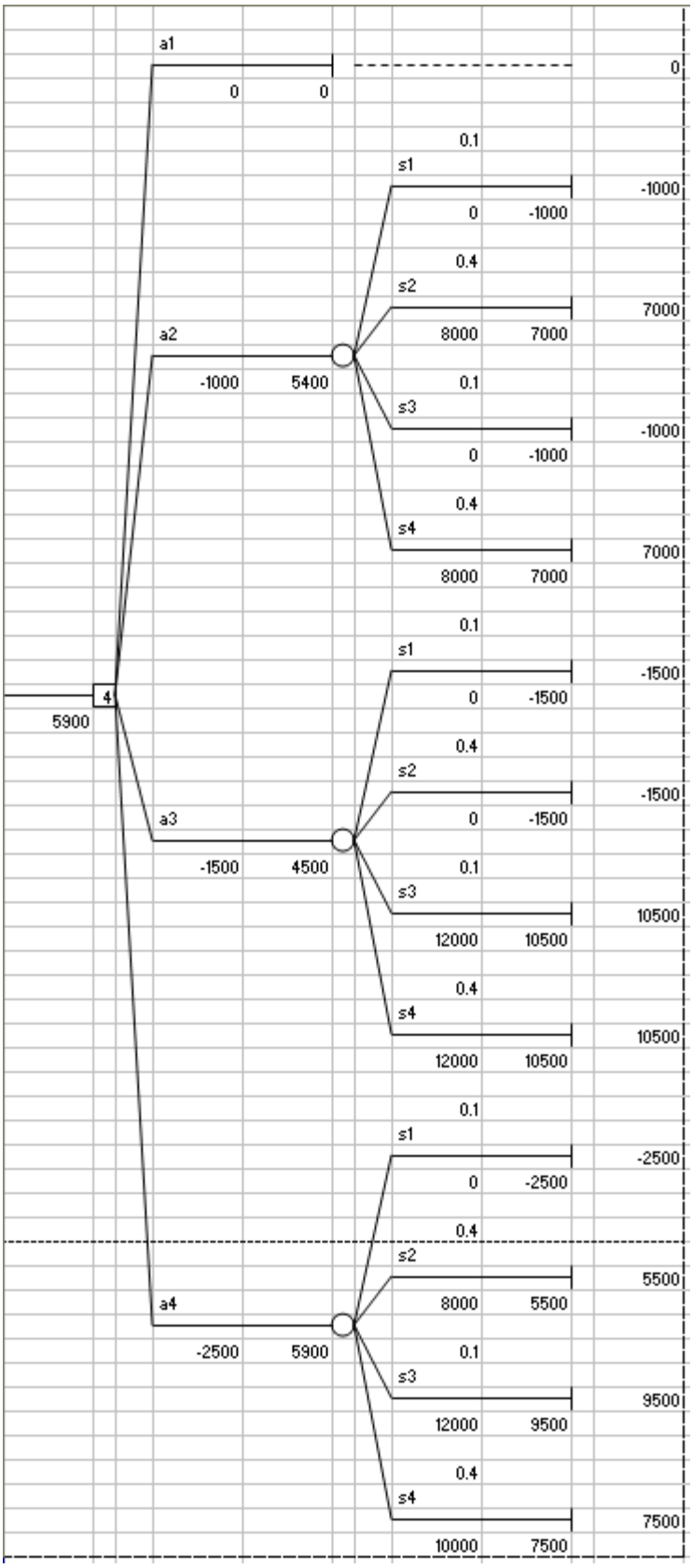
Minimax regret: الشركة تقدم للعرضين أي البديل a_4

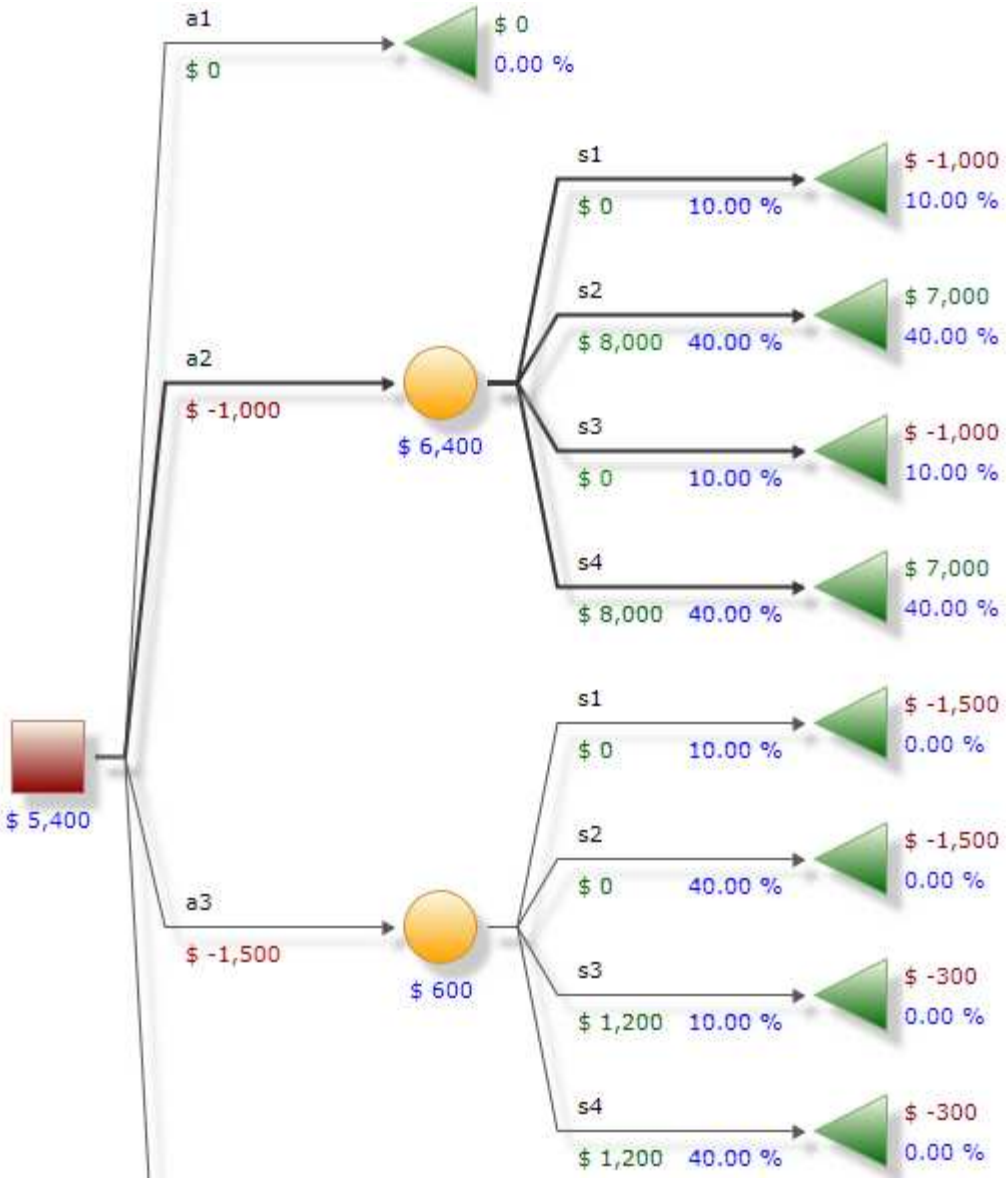
EMV :

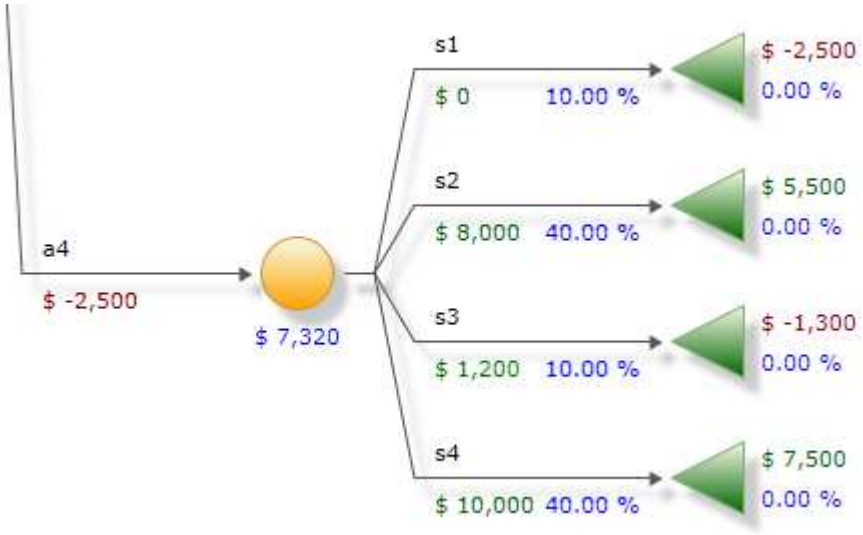
$$EMV(1) = 0.1(0) + 0.4(0) + 0.1(0) + 0.4(0) = 0$$
$$EMV(2) = 0.1(-1) + 0.4(7) + 0.1(-1) + 0.4(7) = 5.4$$
$$EMV(3) = 0.1(-1.5) + 0.4(-1.5) + 0.1(10.5) + 0.4(10.5) = 4.5$$
$$EMV(4) = 0.1(-2.5) + 0.4(5.5) + 0.1(9.5) + 0.4(7.5) = 5.9$$

ومنها نجد ان على الشركة التقدم للعرضين أي البديل a_4

الحل بشجرة القرار:


a1
0
0
0.1
s1
-1000
0
-1000
0.4
s2
7000
8000
7000
a2
-1000
5400
0.1
s3
-1000
0
-1000
0.4
s4
7000
8000
7000
0.1
s1
-1500
0
-1500
4
5900
0.4
s2
-1500
0
-1500
a3
-1500
4500
0.1
s3
10500
12000
10500
0.4
s4
10500
12000
10500
0.1
s1
-2500
0
-2500
0.4
s2
5500
8000
5500
a4
-2500
5900
0.1
s3
9500
12000
9500
0.4
s4
7500
10000
7500


a1
$ 0
$ 0
0.00 %
s1
$ 0
10.00 %
$ -1,000
10.00 %
s2
$ 8,000
40.00 %
$ 7,000
40.00 %
a2
$ -1,000
$ 6,400
s3
$ 0
10.00 %
$ -1,000
10.00 %
s4
$ 8,000
40.00 %
$ 7,000
40.00 %
s1
$ 0
10.00 %
$ -1,500
0.00 %
$ 5,400
s2
$ 0
40.00 %
$ -1,500
0.00 %
a3
$ -1,500
$ 600
s3
$ 1,200
10.00 %
$ -300
0.00 %
s4
$ 1,200
40.00 %
$ -300
0.00 %


s1
$ 0
10.00 %
$ -2,500
0.00 %
s2
$ 8,000
40.00 %
$ 5,500
0.00 %
a4
$ -2,500
$ 7,320
s3
$ 1,200
10.00 %
$ -1,300
0.00 %
s4
$ 10,000
40.00 %
$ 7,500
0.00 %

حالة 9:

أعلنت وزارة الداخلية منح 85000 ريال لشخص او شركة لطرح افضل خطة لإستخدام تكنولوجيا الإتصالات اللاسلكية التي لايمكن كشفها لغرض مكافحة الإرهاب. مهنس الإتصالات مالك عبدالرحمن صاحب شركة مالك لتقنية الإتصالات يفكر في التقدم او عدمه لهذه المنحة. قدر مالك انه سيتكلف 5000 ريال للإعداد لهذه المنحة و أن لدية فرصة 50-50 للفوز بالمنحة. إذا تم فوزه بالمنحة فإن عليه أن يقرر فيما إذا سيستخدم تقنية المكروويف *microwave* أو تقنية الخلوي *cellular* أو تقنية الأشعة تحت الحمراء *infrared* حيث أن لديه خبرة في كل منها ولكنه يحتاج للحصول على بعض الأجهزة إعتمادا على التقنية المستخدمة. الجدول التالي يعطي نوع التقنية وتكلفة الأجهزة:

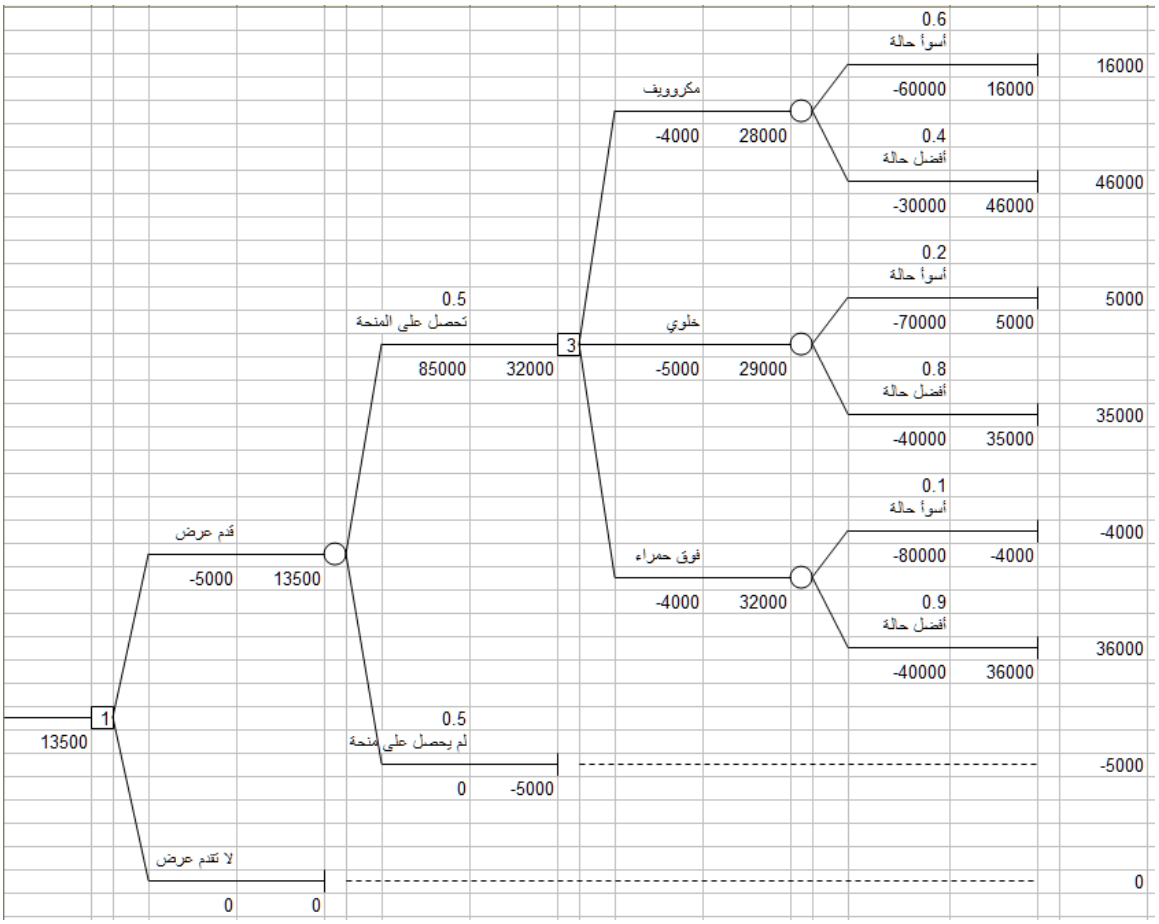
Technology	***Equipment Cost***
Microwave	4,000
Cellular	5,000
Infrared	4,000

بالإضافة لتكلفة الأجزة فإن على مالك صرف بعض المال على البحث والتطوير *research and development (R&D)* لكي يعد لهذه المنحة ولكنه لايعرف بالتمام تكلفة هذا. لهذا أستخدم مالك تحليل أفضل حالة *best-case* وأسوأ حالة *worst-case* لإستخدام كل من التقنيات المقترحة مع إعطاء إحتمالات لكل منها معتمدا على خبرته في هذا المجال فنتج الجدول التالي:

	Possible R&D Costs			
	Best Case		***Worst Case***	
	Cost	***Prob.***	***Cost***	***Prob.***
Microwave	30,000	0.4	60,000	0.6
Cellular	40,000	0.8	70,000	0.2
Infrared	40,000	0.9	80,000	0.1

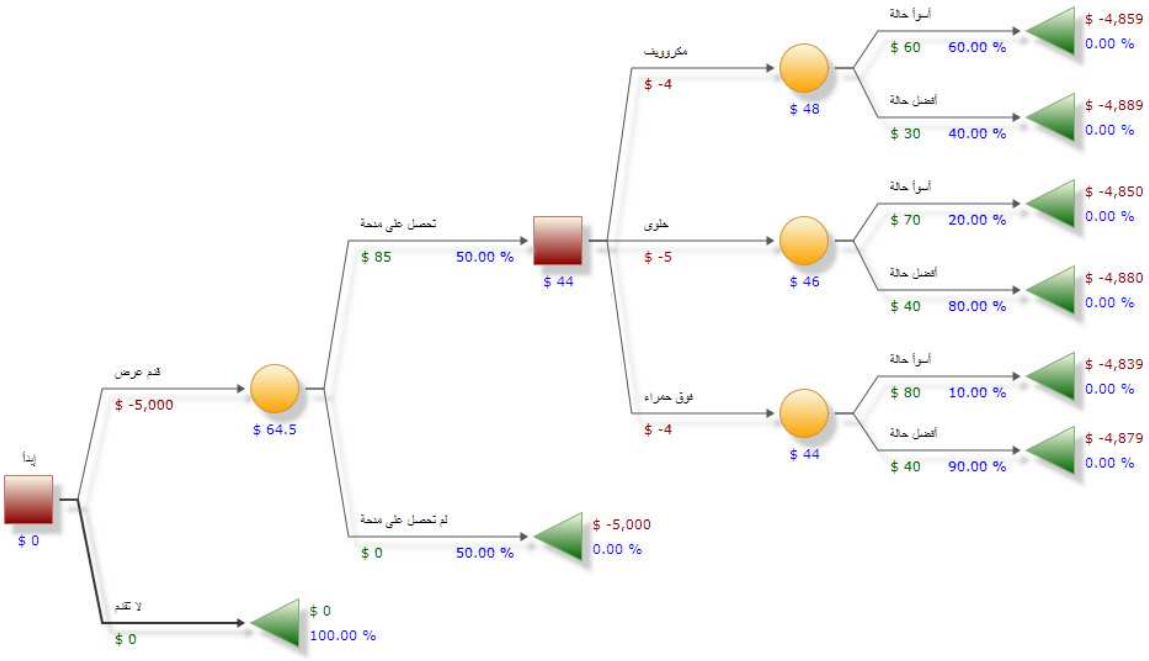
يحتاج مالك لإستخدام جميع هذه المعلومات لكي يقرر في التقدم او عدمه لهذه المنحة.

الحل:



تمرين:

أكتب تقرير مناقشا فيه النتائج.


إبدأ
$ 0
قدم عرض
$ -5,000
$ 64.5
لا تقدم
$ 0
$ 0
تحصل على منحة
$ 85
50.00 %
$ 44
لم تحصل على منحة
$ 0
50.00 %
$ -5,000
0.00 %
مكروويف
$ -4
$ 48
حلوى
$ -5
$ 46
فوق حمراء
$ -4
$ 44
أسوأ حالة
$ 60
60.00 %
$ -4,859
0.00 %
أفضل حالة
$ 30
40.00 %
$ -4,889
0.00 %
أسوأ حالة
$ 70
20.00 %
$ -4,850
0.00 %
أفضل حالة
$ 40
80.00 %
$ -4,880
0.00 %
أسوأ حالة
$ 80
10.00 %
$ -4,839
0.00 %
أفضل حالة
$ 40
90.00 %
$ -4,879
0.00 %

تمرين:

شركة الصناعات الكيميائية ترغب في تحديد حجم مصنع جديد لمنتج كيميائي. وقد سبق لإدارة الشركة إعتبار فقط بناء مصنع كبير أو مصنع صغير. تكلفة بناء مصنع كبير 25 مليون ريال وصغير 15 مليون ريال. قدرت الشركة أن الطلب لهذا المنتج الجديد سيكون عالي بإحتمال 75% وطبعا متدني بإحتمال 30%.

الجدول التالي يلخص المدفوعات بملايين الريالات والمتوقعة لكل حجم مصنع ولكل حجم طلب (بغض النظر عن تكلفة المصنع):

	Demand	
Factory Size	***High***	***Low***
Large	$175	$ 95
Small	$125	$105

تمارين

(1

لمصفوف المدفوعات التالية

	State of Nature		
Decision	**1**	**2**	**3**
A	50	75	35
B	40	50	60
C	40	35	30

هل يوجد قرار مسيطر؟ وفي حالة وجوده أي قرار يستبعد؟

(2)

شركة مشار لإستيراد الأقمشة الشتوية يجب أن تطلب مقدما أقمشة لفصل الشتاء القادم. على مدير المشتريات أن يحدد مقدما كمية الأقمشة كبيرة أو متوسطة أو صغيرة. العدد الذي سيباع يعتمد بشكل كبير على نوعية الشتاء القادم إذا كان شديد البرودة أو عادي أو خفيف. الجدول التالي يعطي المدفوعات تحت الظروف السابقة:

	Weather Condition		
Size of Order	**very cold**	**Normal**	**Light**
Large	10	7	3
Medium	8	8	6
Small	4	4	4

Payoffs (in $1000s)

قدر مدير المشتريات حالة الشتاء القادم بإحتمالات 0.25 شديد البرودة و 0.6 عادي و 0.15 خفيف.

أ) أي قرار أفضل بإستخدام معيار *maximax* ؟

ب) أي قرار أفضل بإستخدام معيار *minimax regret*؟

ت) أي قرار أفضل بإستخدام معيار *EMV*؟

ث) اوجد الحل بإستخدام شجرة قرار.

(3)

أحد إستثمارات حسن سوف تعطي مردود قريب ويريد أن يحدد كيفية إستثمار المرود وهو 30000 ريال. يفكر حسن في نوعين جديدين من الإستثمار. الأول صندوق أسهم مضون *stock mutual fund* و الثاني شهادة إيداع لسنة واحدة *one-year certificate of deposit* (*CD*). شهادة الإيداع مضمونة أن تعطي 8% عائد. قدر حسن أن العائد من الأسهم قد يكون 16% أو 9% أو -2% وذلك إذا كانت حالة سوق الأسهم جيدة أو متوسطة أو ضعيفة على الترتيب. كذلك قدر حسن إحتمال أن يكون سوق الأسهم جيد هو 0.1 و متوسط 0.85 وضعيف 0.05.

1) كون جدول مدفوعات لهذه المشكلة.

2) ماهو قراره حسب معيار *maximax* ؟

3) ماهو قراره حسب معيار *maximin*؟

4) ماهو قراره حسب معيار *minimax regret*؟

5) ماهو قراره حسب معيار *EMV*؟

(4)

وكالة سيارات قدمت عرض للتأجير بغرض الشراء لمدة سنتين يتكون من 3 خيارات

Plan	***Fixed Monthly Payment***	***Additional Cost Per Kilo***
I	200	0.095 *per Kilo.*
II	300	0.061 *for the first* 6,000 ***kilos;*** 0.050 *thereafter.*
III	170	0.000 *for the first* 6,000 ***kilos;*** 0.14 *per* ***kilo*** *thereafter.*

على إفتراض أن الزبون يسوق بين 15000 و 35000 كيلو خلال السنتين القادمة حسب الإحتمالات التالية:

P(driving 15,000 kilos) = 0.1

P(driving 20,000 kilos) = 0.2

P(driving 25,000 kilos) = 0.2

P(driving 30,000 kilos) = 0.3

P(driving 35,000 kilos) = 0.2

1) كون جدول مدفوعات لهذه المشكلة.
2) أي قرار يتخذه تحت معيار *maximax* (لاحظ أن المدفوعات هي تكلفة)؟
3) أي قرار يتخذه تحت معيار *maximin*؟
4) أي قرار يتخذه تحت معيار *minimax regre*t؟
5) أي قرار يتخذه تحت معيار *EMV*؟

(5)

قسم الأسماك بشركة بندة يبيع أسماك طازجة و أكلات بحرية. القسم يستقبل يوميا شحنات من أسماك البلطي المنشأة في مزارع أسماك قريبة بسعر 2.45 ريال للسمكة ويبيعها بسعر 3.95. الأسماك المتبقية في نهاية اليوم تباع بسعر 1.25 ريال. يريد مدير قسم الأسماك تحديد عدد اسماك البلطي التي يتم طلبها يوميا معتمدا على بيانات تاريخية من قسم التسويق عن مبيعات هذا النوع من الأسماك كالتالي:

Demand	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Probability	0.02	0.06	0.09	0.11	0.13	0.15	0.18	0.11	0.07	0.05	0.03

1) كون جدول مدفوعات لهذه المشكلة.
2) أي قرار يتخذ تحت معيار *maximax* ؟
3) أي قرار يتخذ تحت معيار *maximin*؟
4) أي قرار يتخذ تحت معيار *minimax regret*؟
5) أي قرار يتخذ تحت معيار *EMV*؟
6) لنفترض أن قسم الأسماك يحصل على خصم ليصبح سعر السمكة الواحدة 2.25 ريال إذا تم طلب 15 سمكة أو أكثر. ماهي توصيتك لقسم الأسماك لعدد الأسماك التي يشتريها في هذه الحالة؟

(6)

لدى أحمد عمارة بغرف للتأجير اليومي او الاسبوعي. تحوي العمارة على 200 مكيف منفصل. يعاني أحمد من التعطل المتكرر للمكيفات نتيجة زيادة العواصف الترابية في الرياض والتي تتسبب في إنسداد مرشحات (فلاتر) الأجهزة مما يؤدي إلى تعطل

الجهاز. فكر احمد في التأمين على الأجهزة ضد عواصف الغبار حيث قدر تكلفة الخراب الناتج من العواصف بالتوزيع التالي:

Dust Damage								
(in 1000)	**0**	**15**	**30**	**45**	**60**	**75**	**90**	**105**
Probability	0.25	0.08	0.10	0.12	0.15	0.12	0.10	0.08

احمد يفكر في ثلاثة بدائل للتعامل مع هذه المخاطر:

1- التأمين بمبلغ 47000 ريال سنويا على جميع الأجهزة والذي سيغطى 100% لأي خراب أو إعطال.

2- التأمين بمبلغ 25000 ريال سنويا والذي سيغطي أي خراب تزيد تكلفته عن 35000 ريال.

3- تأمين ذاتي بمعنى أنه لن يؤمن على الأجهزة بل يقوم بإصلاح الجهاز او الأجهزة المعطلة كلما حدث خراب.

1) كون جدول مدفوعات لهذه المشكلة.

2) أي قرار يتخذ تحت معيار *maximax* ؟

3) أي قرار يتخذ تحت معيار *maximin*؟

4) أي قرار يتخذ تحت معيار *minimax regret*؟

5) أي قرار يتخذ تحت معيار *EMV*؟

6) كون شجرة قرار.

(7)

شركة تشييد تخطط لبناء مجمع وحدات سكنية في جنوب الرياض إما صغير الحجم أو متوسط أو كبير. المدفوع (المردود الإستثماري) لأي حجم سوف يعتمد على الطلب

السوقي لوحدات سكنية في تلك المنطقة والذي قد يكون منخفض أو متوسط أو عالي حسب الجدول التالي:

	Market Demand		
Size of Development	**Low**	**Medium**	**High**
Small	400	400	400
Medium	200	500	500
Large	-400	300	800
	(*Payoffs in* 1000)		

قدر مدير الشركة أن الطلب سيكون منخفض بإحتمال 21.75% و متوسط بإحتمال 35.5% وعالي بإحتمال 42.75%.

1) أي قرار يتخذ تحت معيار *maximax* ؟

2) أي قرار يتخذ تحت معيار *maximin*؟

3) أي قرار يتخذ تحت معيار *minimax regret*؟

4) أي قرار يتخذ تحت معيار *EMV*؟

5) كون شجرة قرار.

(8)

في المشكلة السابقة إذا قام مدير الشركة بإستشارة خبير من أصدقائه (الإستشارة مجانا) والذي اعطى له نتائج دراسة لتنبؤات الطلب المستقبلية مقابل الطلب الفعلي على هذا المشروع كما في الجدول التالي:

	Actual Demand		
Forecasted Demand	***Low***	***Medium***	***High***
Low	0.1600	0.0300	0.0100
Medium	0.0350	0.2800	0.0350
High	0.0225	0.0450	0.3825

(ملاحظة: بجمع عناصر القطر الرئيسي نجد أن المستشار كان مصيبا 82.25% من المرات)

1) كون شجرة قرار لهذه المشكلة.

2) ماهو *EMV* للقرار الأمثل بدون الأخذ في الإعتبار نتائج الإستشارة؟

3) ماهو *EMV* للقرار الأمثل مع الأخذ في الإعتبار نتائج الإستشارة؟

(9)

شركة عبد الرحمن عبد الرحمن تقوم بصناعة وتركيب لوحات التحكم الكهربائي. قبل القيام بتركيب لوحة للزبون يقوم مهندس الشركة بإختبار 3 أجزاء مهمه فيها والتي يمكن إختبارها بأي ترتيب. إذا فشل أي جزء فإن اللوحة ترسل للمصنع لأعادة تصنيعها. تكلفة الإختبار للأجزاء مع إحتمالات الفشل تعطي في الجدول التالي:

Component	***Cost of Test***	***Probability of Failure***
X	$1.75	0.125
Y	$2.00	0.075
Z	$2.40	0.140

كون شجرة قرار وناقش النتائج.

(10)

صاحب مصنع الصناعات الجلدية يتفاوض مع أحد البنوك للحصول على قرض بمبلغ 300000 ريال والذي سيدفع كاملا عند نهاية 9 سنوات. الفوائد على القرض تدفع في نهاية كل سنة مالية حسب الترتبات المالية التالية:

1- القرض يتم على أساس معدل ثابت (*FRL*) *fixed rate loan* بفائدة 9% سنويا.

2- القرض يتم على أساس معل قابل للتعديل (*ARL*) *adjustable rate loan* والذي تدفع فيه فائدة 6% عند نهاية كل سنة للخمس سنوات الأولى. عند بداية السنة السادسة فإن معدل الفائدة قد يتغير إلى 7% بإحتمال 0.1 أو 9% بإحتمال 0.25 أو 11% بإحتمال 0.65.

3- القرض يتم على أساس معل قابل للتعديل (*ARL*) *adjustable rate loan* أيضا بفائدة 4% في السنة حتى نهاية 3 سنوات وعند بداية السنة الرابعة فإن معدل الفائدة قد يتغير إلى 6% بإحتمال 0.05 أو 8% بإحتمال 0.3 أو 10% بإحتمال 0.65. عند بداية السنة السابعة فإن معدل الفائدة قد ينقص 1% بإحتمال 0.1 أو يزيد بمقدار 1% بإحتمال 0.2 أو يزداد 3% بإحتمال 0.7.

1) كون شجرة قرار لهذه المشكلة لحساب الفائدة الكلية المدفوعة تحت كل السيناريوهات السابقة.

2) ماهو القرار الذي يقلل الفائدة الكلية المتوقعة *expected total interest*.

(11)

شركة الحفر الوطنية تعد عرض لمناقصة البحث والحفر لإستخراج الغاز وتفكر في تقديم عرض مرتفع السعر 16 مليون أو عرض منخفض السعر 7 مليون. الشركة تتنافس مع شركة اخرى وهي شركة الحفر العربية وتتوقع أن هذه الشركة المنافسة سوف تقدم عرض 10 ملايين بإحتمال 0.4 أو 6 ملايين بإحتمال 0.6. التوقعات الجيولوجية تتنبأ بوجود كميات كبيرة من الغاز بإحتمال 0.15 وكميات متوسطة بإحتمال 0.35 و غير ممكن إستغلالها بإحتمال 0.50. الكميات الكبيرة أو المتوسطة سوف ينتج عنها مكسب 120 مليون أو 28 مليون على التوالي بعد إستبعاد تكاليف الحفر والإستخراج. الشركة التي تفوز بالعقد عليها القيام بحفر بئر إستكشافي يكلف 5 ملايين ريال.

1) كون شجرة قرار لهذه المشكلة.
2) ماهو أمثل قرار للشركة بمعيار *EMV*؟

(12)

بلدية الشمال تفكر في فتح شارع يربط بين منطقتين ويمر بأرض بيضاء. هناك إحتمال 60% بأن تقوم البلدية بهذا المشروع. تاجر العقار محمد أحمد علم بهذا المشروع من صديق يعمل في البلدية وفكر في شراء هذه الأرض البيضاء قبل الإعلان الرسمي عن المشروع. الأرض معروضة للبيع في حراج عن طريق عروض مغلقة. قدر محمد لو انه قدم عرض شراء بمبلغ 1.25 مليون فإن هناك فرصة 25% للفوز بالأرض وإذا عرض 1.45 مليون فهناك فرصة 45% للفوز بالأرض وإذا عرض 1.85 مليون ففرصته تصبح 85% للفوز بالأرض. إذا أشترى الأرض وقررت البلدية فتح الشارع فإنه سيعوض عن الجزء المقتطع مبلغ 2.2 مليون. ولكن إذا لم تقرر البلدية فتح الشارع فإن الأرض لن تباع بأكثر من 1.15 مليون.

1- كون شجرة قرار لمساعدة محمد.

2- ماهو أمثل قرار لمحمد بمعيار *EMV*؟

(13)

بينت الدراسات الطبية أن 10 من 100 من البالغين مصاب بمرض معين في القلب. إذا قام شخص مريض بإجراء فحص فهناك إحتمال 90% أن النتيجة تكون أنه مصاب بالمرض. عندما يفحص شخص سليم فإنه يوجد إحتمال 95% أن تكون النتيجة عدم وجود المرض. لنفترض أن شخصا وصل لعيادة الطوارئ يشتكي من الم في صدره وبين الفحص انه مريض بذلك المرض فما هو الإحتمال أن هذا الشخص مريض فعلا؟

(14)

مقاول عقارات يشتري عقارات قديمة ويجددها ويبيعها. يفكر المقاول في شراء منزل قديم معروض للبيع بسعر 240000 ريال والذي يمكن بيعه بعد التجديد بمبلغ 450000 ريال. المنزل يباع مباشرة بعد إنتهاء التجديد. المقاول يتوقع مصاريف 1500 ريال شهريا غير المواد على مرحلة التجديد من لحظة شرائه للمنزل حتى بيعه. لدي المقاول صيغتين للتجديد. الصيغة (أ) تكلف 125000 ريال وتحتاج 4 أشهر لإكمالها وتحتاج لتغيرات أساسية للمبنى وتحتاج لتصريح من البلدية يكلف 5000 ريال ويستغرق شهرين للحصول عليه. الصيغة (ب) وتكلف 85000 ريال وتحتاج 3 شهور لإكمالها ولا تحتاج لتغيرات أساسية للمبنى. المقاول يعلم أن البلدية سوف تسمح له بهذا التغيير بإحتمال 40%. المقاول قام بشراء المنزل ولكنه لم يقرر أي صيغة يستخدم وعليه البدئ مباشرة في العمل وبإستطاعته إستخدام الصيغة (أ) أو الصيغة (ب). فإذا بدأ بالصيغة (ب) فلن يعلم لمدة شهرين فيما سيتحصل على التصريح أم لا. إذا لم يحصل على التصريح فعليه التحول للصيغة (أ) والبدئ من جديد وسيكلفه هذا مبلغ 20000 ريال مصاريف إضافية

ومدة زمنية أطول لإكمال التجديد. أو يمكنه عدم البدئ بأي صيغة حتى يعرف نتيجة التصريح.

1- كون شجرة قرار لمعضلة المقاول.

2- ماهو القرار الأمثل بمعيار *EMV*؟

(15)

ترغب جهة حكومية في إقامة ثلاثة مبانٍ A, B, C جديدة وقد تلقت عروضًا من أربع شركات قيمتها بملايين الريالات مبيَّنة في الجدول التالي:

الشركات	الأبنية		
	A	B	C
1	2.9	1.6	3.1
2	3.1	1.7	2.8
3	3.0	1.8	2.7
4	2.8	1.5	2.7

اكتب مصفوفة العوائد واستخدمها لإيجاد أفضل عقد للحكومة. (أفضل عقد هنا هو الذي يجعل مجموع التكاليف أصغر ما يمكن) ما نوع القرار المستخدم؟

(16

إذا علمت أن جدول العوائد (ا) يمثّل جدول أرباح في حين أن جدول (ب) هو جدول تكاليف فيما يلي:

جدول (ا) أربـاح

البدائـل	حـالات الطبيعـة واحتمالاتـها			
	0.6	0.1	0.2	0.1
	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	3	5	8	−1
a_2	6	5	2	0
a_3	0	5	6	4

جدول (ب) تكاليف

البدائـل	حـالات الطبيعـة واحتمالاتـها		
	0.1	0.6	0.3
	S_1	S_2	S_3
a_1	5	2	1
a_2	4	3	3
a_3	2	6	1

فما أفضل البدائل باستخدام:

أولاً: معيار القيمة المتوقّعة للعوائد.

ثانيًا: معيار القيمة المتوقّعة لخسارة الفرص.

ثالثًا: معيار حالات الطبيعة الأكثر وقوعًا.

(17

إذا كان جدول (١) يمثِّل جدول تكاليف في حين أن جدول (٢) يمثِّل جدول أرباح:

جدول (١) تكاليف

a_i	S_i			
	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	5	8	3	1
a_2	7	4	5	2
a_3	3	6	6	4

جدول (٢) أرباح

a_i	S_i		
	S_1	S_2	S_3
a_1	7	2	−1
a_1	3	6	2
a_1	0	3	8

أوجد أفضل البدائل وفقًا لكل معيار مما يلي:

(i) معيار لابلاس.

(ii) معيار التشاؤم.

(iii) معيار التفاؤل.

(iv) معيار هورويز بـ $\alpha = 0.4$.

(18

لديك جدول القرار التالي: (جدول تكاليف)

البدائـل	حالات الطبيعة واحتمالاتها	
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
	S_1	S_2
a_1	4	15
a_2	10	12
a_3	2	15

(ا) اوجد أفضلْ البدائل مستخدمًا معيار القيمة المتوقَّعة للعوائد.

(ب) اوجد المجال الذي تقع فيه p_1 بحيث يبقى البديل الذي حصلت عليه في (ا) هو أفضل البدائل.

(19

يطير رجل أعمال عدَّة مرَّات في الأسبوع بين الرياض وجدة. ويمكن في كل مرَّة أن يستخدم حافلة النقل الجماعي أو ليموزين أو سيارة أجرة للمطار بتكلفة 75, 35, 15 ريالاً على الترتيب. واحتمال أن يدرك رحلة الطيران تتوقف على وسيلة النقل المستخدمة وهي على الترتيب 0.99, 0.96, 0.92 فإذا علمت أن الرجل يحقِّق منفعة قدرها 5000 ريال في كل مرَّة يدرك فيها رحلة الطيران فما وسيلة النقل الواجب عليه اختيارها لكي يحقِّق أكبر ربح ممكن؟

(20

شركة بترول تملك مساحة من الأرض. وتتوقع الشركة أن تحتوي هذه المساحة على 500000 برميل أو 200000 برميل أو 50000 برميل أو ألاّ تحتوي على شيء من البترول. الشركة تريد أن تأخذ قرارًا يخص حالة من الحالات التالية:

(أ) تقوم الشركة بأعمال التنقيب عن البترول في تلك الأرض.

(ب) تبيع الأرض مقابل 90000 ريال.

(جـ) تسلم الأرض لشركة أخرى لتربح ريالاً عن كل برميل منتج (تربح الشركة صاحبة الأرض ريالاً عن كل برميل تنتجه الشركة المستخدمة لمساحة الأرض).

فإذا كانت عملية التنقيب تكلِّف الشركة 150000 ريال وعملية استخراج البترول بعد العثور عليه يكلِّف الشركة 50000 ريال وثمن بيع البترول يقدَّر بـ 5 ريالات للبرميل الواحد.

(١) حدِّد الاستراتيجيات وحالات الطبيعة المتعلِّقة بمشكلة الشركة.

(٢) حدِّد مصفوفة العائد للشركة (بعد طرح التكاليف).

(٣) ما أفضل الاستراتيجيات لو أخذت الشركة بقاعدة

(i) أكبر الأكبر (ii) أكبر الأقل

(٤) ماذا تكون أفضل الاستراتيجيات لو كانت احتمالات الكمِّيات المتوقَّعة من البترول هي على التوالي: 0.3 ، 0.4 ، 0.2 و0.10 بالنسبة لـ 500000 ، 200000 ، 50000 و صفر برميل. استخدم معيار القيمة المتوقَّعة للعوائد؟.

(21

شركة سيارات تريد أن تأخذ قرارًا يخص كمية السيارات التي سوف ترسلها إلى الخارج من بين خمس كمّيات ممكنة وهي 100, 150, 200, 350 و400 سيارة. ولم يكن معروفًا لدى الشركة المستوى الدقيق الذي سيكون عليه الإقبال على شراء السيَّارات في الخارج. ولكن في كل الأحوال هذا الإقبال له ثلاث حالات ممكنة، ضعيف ومتوسط وقوي. فإذا كان الإقبال ضعيفًا فالشركة سوف تخسر 2000 ريال عن كل سيارة وإنْ كان الإقبال متوسطًا فسوف تربح الشركة 1500 ريال عن كل سيارة أما إذا كان الإقبال قويًا فسوف تربح الشركة 4000 ريال عن كل سيارة. الاحتمالات كي يكون الإقبال ضعيفًا أو متوسطًا أو قويًا هي على التوالي: 0.4, 0.3, 0.3.

(ا) حدِّد مصفوفة العائد.

(ب) ما هو القرار الأنسب باستخدام معيار القيمة المتوقَّعة للعوائد؟.

(22

خمسين بطاقة. البائع يستطيع أن يخزن ثلاث علب على الأكثر. غالبًا إذا فتحت علبة لبيع بعض البطاقات فكل البطاقات المتبقية تباع بعد ذلك (أي أن العلبة إما أن تباع بكلِّ ما فيها أو ألَّا تباع وتبقى مغلقة). والبطاقة الواحدة تكلِّف 5 ريالات وتباع بِـ 10 ريالات. وكل علبة لا تباع تُعاد إلى المصنع المنتج مقابل 100 ريال.

(ا) حدِّد البدائل وحالات الطبيعة الممكنة.

(ب) ما أفضل البدائل في كل من الحالات التالية؟

(١) إذا ما أخذ البائع بقاعدة أكبر الأكبر.

(٢) إذا ما أخذ البائع بقاعدة أكبر الأقل.

(٣) إذا ما أخذ البائع بقاعدة القيمة المتوقَّعة للعوائد. وكانت احتمالات المبيعات كما يلي:

عدد العلب المباعة	0	1	2	3
الاحتمالات	0.1	0.4	0.3	0.2

(23

توافرت لأحد رجال الأعمال فرصة استثمار لِـ 300000 ريال في مضاربة تجارية تتوافر فيها الصفات المبيَّنة بالجدول التالي:

الأرباح بالريال	0	20000	40000	60000
المنفعة	0	0.625	0.875	1.000
الاحتمال	0.2	0.3	0.2	0.3

ا) ارسم دالَّة المنفعة.

ب) ما نصيحتك لرجل الأعمال حول فرصة الاستثمار المبيَّنة أعلاه؟ وما القيمة المتوقَّعة الناتجة من هذا الاستثمار:

(24

شركة تجارية ترغب في اختيار الاستراتيجية المثالية التي تعود عليها بأعلى أرباح وكانت مصفوفة العوائد بالنسبة للشركة كالتالي:

البدائل	حالات الطبيعة واحتمالاتها			
	0.15	0.1	0.4	0.35
	A	B	C	D
a_1	7	−1	2	6
a_2	9	4	4	2
a_3	2	9	5	5
a_4	0	3	−1	3

(ا) باستخدام معيار القيمة المتوقَّعة للعوائد ما هي أفضل استراتيجية؟

(25

لديك جدول القرار التالي :

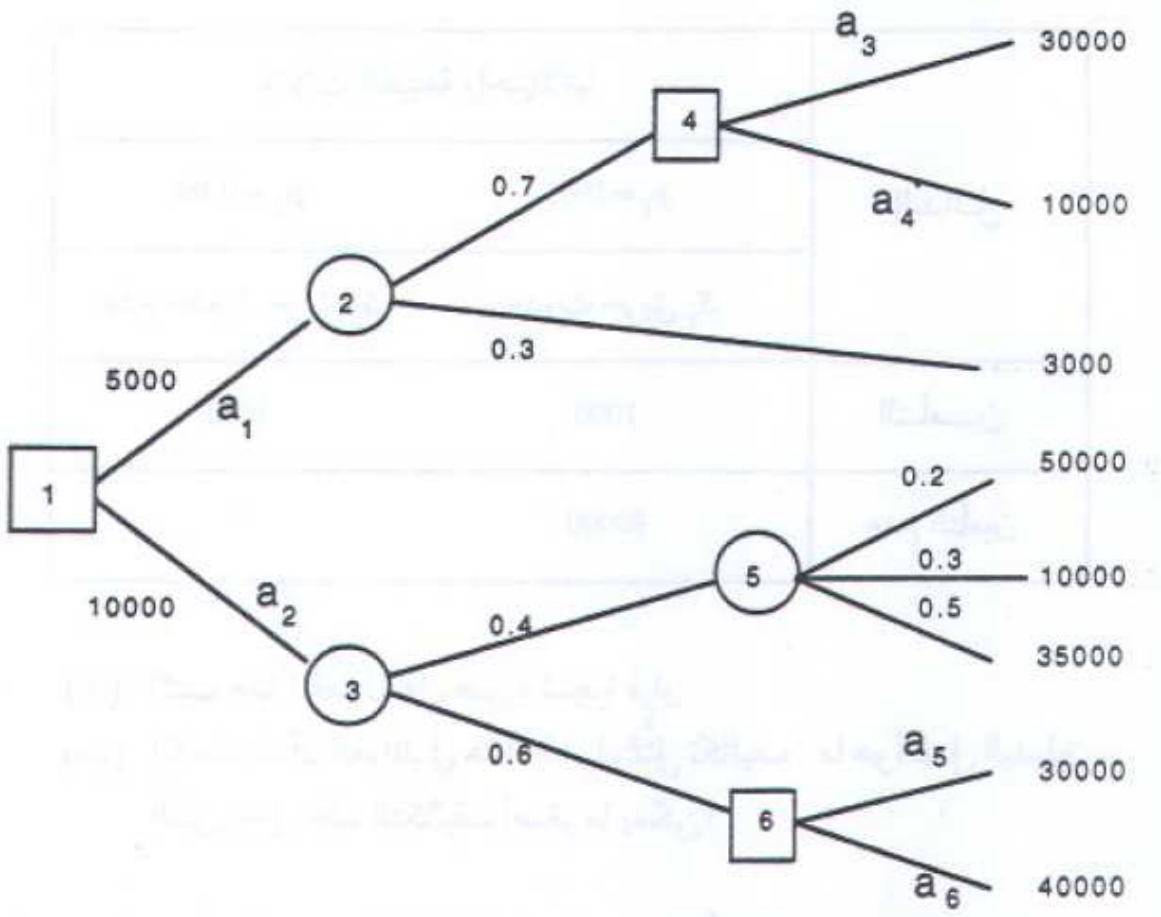
البدائل	حالات الطبيعة واحتمالاتها	
	$p_1 = 0.01$	$p_2 = 0.99$
	حدوث حريق S_1	عدم حدوث حريق S_2
التأمين	1000	1000
عدم التأمين	80000	0

(ا) اكتب هذا الجدول على صورة شجرة قرار.

(ب) إذا علمت أن العوائد في هذا الجدول تمثّل تكاليف. ما هو أفضل البديلين الذي يجعل هذه التكاليف أصغر ما يمكن؟

(26

لديك شجرة القرار التالية بحيث تمثّل الأرقام التكاليف بالدولار بينما الأرقام العشرية على الفروع فما أفضل البدائل لكل مرحلة إذا علمت أن احتمال كل من α_3، α_4، α_5، α_6 هو 0.5؟



(27

تعتزم إحدى شركات الطاقة الشمسية تطوير جهازين للطاقة الشمسية وتتوقف العوائد الناتجة عن كل جهاز على أسعار البترول والنتائج ملخَّصةً كما في الجدول التالي:

(ا) ما الجهاز الذي يجب أن تنتجه الشركة لكي تحقِّق أكبر ربح ممكن؟.

(ب) ارسم شجرة القرار لهذه المشكلة واستنتج منها أفضل الحلول وفقًا لمعيار القيمة المتوقَّعة للعوائد.

	أسعـــار البـــترول		
الأجهـزة	مرتفعة $p_1 = 0.6$	مرتفعة جدًّا $p_2 = 0.3$	حادة الارتفاع $p_3 = 0.1$
I	50000	73000	500000
II	13000	100000	60000

(28

تواجه شركة تراجعًا كبيراً في معدَّلات النمو ولديها بديلان لحل هذه المشكلة:

الأول: زيادة الإنتاج وتكلفة ذلك 100000 ريال.

الثاني: زيادة حجم المخزون وتكلفة ذلك 12000 ريال للسنة تدفع في نهايتها.

وتتوقف النتائج في الحالتين على الحالة الاقتصادية حيث يُتوقَّع أن يكون الاقتصاد في حالة نمو باحتمال يقدَّر بـ 0.7 أما العوائد المتوقَّعة فهي حينئذ كما يلي:

(أ) في حالة النمو الاقتصادي عندئذ يوجد احتمال قدره 0.8 لزيادة الطلب على الإنتاج والأرباح المتوقَّعة عندها هي 1000000 ريال واحتمال قدره 0.2 لعدم الزيادة على الطلب والأرباح المتوقعة هي 800000 ريال. وفيما يتعلق بالمخزون فإنَّ الأرباح المتوقَّعة تقدر بـ 900000 ريال في حالة زيادة الطلب على الإنتاج ويقدَّر بـ 600000 ريال في حالة عدم الزيادة على الطلب.

(ب) في حالة عدم النمو الاقتصادي فيتساوى في هذه الحالة احتمال زيادة الطلب على الإنتاج واحتمال عدم زيادة الطلب على الإنتاج والأرباح المتوقَّعة عندئذ تقدَّر كما يلي:

(i) زيادة الإنتاج وزيادة في الطلب على الإنتاج 750000 ريال.

(ii) زيادة الإنتاج وعدم زيادة الطلب على الإنتاج 600000 ريال.

(iii) زيادة حجم المخزون مع زيادة الطلب على الإنتاج 550000 ريال.

(iv) زيادة حجم المخزون مع عدم زيادة الطلب على الإنتاج 400000 ريال.

فهل تلجأ الشركة إلى زيادة الإنتاج أم إلى زيادة حجم المخزون مع العلم بأن الشركة تهدف إلى تحقيق أكبر ربح ممكن.

(29

شركة صناعية تحتاج لمادة كيميائية في صناعة منتجاتها، أمام الشركة بديلان:

● أن تستورد هذه المادة. ● أن تنتج هذه المادة بنفسها.

يتوقف اختيار الشركة لأحد البديلين على مدى تأثير هذه المادة في مبيعاتها. وقد لوحظ وجود حالتين فقط لهذا التأثير: إمَّا إيجابي أو سلبي. إذا أخذت الشركة بالبديل الأول فهناك احتمال قدره 0.6 لكي يكون التأثير إيجابيًّا ويكون عائد الشركة في هذه الحالة 400000 ريال وهناك احتمال قدره 0.4 لكي يكون التأثير سلبيًّا وتخسر الشركة في هذه الحالة 100000 ريال. أمَّا إذا ما أخذت بالبديل الثاني وهو إنتاج هذه المادة بنفسها فإن عملية إنتاج هذه المادة تستغرق مدة من الزمن غير ثابتة ولكن أظهرت الدراسة أنَّ هذه المدة هي شهران أو أربعة أشهر وحسب

دراسات إحصائية أولية قامت بها الشركة لوحظ ما يلي:

(i) هناك احتمال 0.3 لإنتاج المادة بعد شهرين ويكون تأثيرها إيجابيًا.

(ii) هناك احتمال 0.4 لإنتاجها بعد شهرين ويكون تأثيرها سلبيًا.

(iii) هناك احتمال 0.15 لإنتاج المادة بعد أربعة أشهر ويكون تأثيرها إيجابيًا.

(iv) هناك احتمال 0.15 لإنتاجها بعد أربعة أشهر بتأثير سلبي.

العوائد الإجمالية المتوقَّعة في الحالات الأربع على الترتيب هي: 500000 ريال، 80000 ريال، 800000 ريال، 120000 ريال ولا يدخل في هذه العوائد تكاليف إنتاج المادة. وقد وجد أنَّ هذا الإنتاج يكلِّف الشركة 20000 ريال شهريًا. وقد وجد أنَّه إذا تمَّ إنتاج هذه المادة بعد شهرين من الزمن وكان تأثيرها إيجابيًا فباستطاعة الشركة أن تقوم بعملية تطوير لطريقة إنتاج هذه المادة. وإذا تمَّ التطوير فهناك احتمال 0.8 كي يكون هذا التطوير ناجحًا ويوفِّر عائدًا قدره 90000 ريال. وهناك احتمال 0.2 كي يكون هذا التطوير فاشلاً وتخسر الشركة في هذه الحالة 200000 ريال. ارسم شجرة القرار لهذه المشكلة وحدِّد أفضل البدائل للشركة إذا علمت أن الشركة تهدف إلى جعل عوائدها أكبر مايمكن.

(30

أعطيت شركة بترول الفرصة من طرف وزارة البترول كي تقوم بعملية تنقيب عن البترول في أرض معيَّنة. إن عملية التنقيب تكلِّف الشركة 100000 ريال وهذه التكلفة لا ترجع للشركة في حالة قيامها بعملية التنقيب وعدم عثورها على البترول. بناءً على دراسة قام بها بعض الجيولوجيين لهذه الأرض استنتج أنَّ هناك احتمال 0.55 كي تكون الأرض حاويةً على البترول. أمام الشركة ثلاثة بدائل وهي:

(i) أنْ تقوم الشركة بعملية التنقيب على البترول معتمدة فقط على نتائج أبحاث الجيولوجيين.

(ii) أنْ تقوم بدراسة إضافية للأرض.

(iii) أن تقـوم بعملية التنقيب تمامًـا دون إجـراء الـدراسة الإضافية للأرض وتتكلف الشركة لذلك 30000 ريال.

إنَّ هذه الـدراسة الإضافية لها حالتان إما إيجابية وذلك باحتمال 0.6 أو سلبية وذلـك باحتـمال 0.4. إذا كانت الدراسة إيجابية فهناك احتمال 0.85 كي تكون الأرض حاويةً على البـترول أما إذا كانت سلبية فهناك احتمال 0.1 كي تكون الأرض حاوية على البترول.

إذا ما قامت الشركة بعملية التنقيب وحصلت على البترول فيقدَّر العائد الإجمالي للشركة بمقدار 400000 ريال (دون طرح تكاليف). تريد الشركة أن تختار بديلاً من البدائل i ، ii ، iii ارسم شجرة القرار وحدِّد أفضل البدائل والذي يعطيها أفضل عائد لهذه الشركة.

(**ملاحظة**: إذا ما وقع التنقيب على البترول هناك حالتان ممكنتان إما أن يقع العثور على البترول. أو لا يقع العثور على البترول).

نظرية المباريات *Game Theory*

الجزء التالي مقتبس من كتاب: أساسيات نظرية المباريات تأليف د. زيد تميم البلخي

أهمية نظرية المباريات

ترجع البدايات الأولى لنظرية المباريات إلى بداية القرن العشرين . ومع ذلك تعتبر نظرية المباريات إحدى الوسائل الحديثة التي تستخدم لاتخاذ القرارات في الحالات والمواقف التي تتميز بوجود الصراع بين الوحدات المتنافسة المستقلة ، سواء كانت أفراداً أو تنظيمات ، حيث لا يستطيع متخذ القرار أن يسيطر بشكل كامل على العوامل المؤثرة في النتائج التي يستطيع الحصول عليها من قراره . إن الميزة الأساسية التي تحدد فيما إذا كان هؤلاء الأفراد (أو تلك التنظيمات) تواجه مباراة أو صراع هو وجود طرف آخر تتناقض أهدافه ومصالحه مع هؤلاء الأفراد (أو تلك التنظيمات) فمثلاً إذا وجدت شركة تحتكر سلعة معينة لا ينافسها فيها أحد فلا ينشأ الصراع إلا إذا دخلت السوق شركة أخرى تنافس هذه الشركة على نفس السلعة . وتعتبر نظرية المباريات أحد أهم طرق الرياضيات التطبيقية المستخدمة لحل مسائل الأعمال والاقتصاد والمسائل العسكرية .

ويتلخص مفهوم نظرية المباريات بوجود لعبة محددة أو مباراة لها هدف نهائي يسعى من أجله كل لاعب ومن خلال مراحل خاصة يتم اختيارها حسب قوانين المباراة وأسلوبها حيث يحاول كل لاعب في هذه المباراة القيام بأفضل أداء ممكن للحصول على أفضل العوائد . وتكمن الصعوبة هنا في أن كلاً من المتنافسين يرغب بجعل عوائده أفضل ما يمكن مع مراعاة ردود فعل الأطراف المنافسة الأخرى .

إن النماذج الأكثر بساطة لمسائل المباريات والمنافسة هي الألعاب الرياضية المختلفة وألعاب الشطرنج وورق اللعب والدومينو وغيرها . وهناك شبه كبير بين المشاركين في مثل هذه الألعاب وبين سلوك المتحاربين لاحتلال موقع معين أو سلوك

المتنافسين في سوق معينة ، وهذا الشبه أدى إلى تعميم لفظ لعبة أو مباراة بحيث يشمل جميع الأوضاع **الاجتماعية** والاقتصادية والسياسية والعسكرية وغيرها من الأوضاع التي تتضمن تنافس أو تعاكس مصالح ، كما أدى هذا الشبه إلى بروز المباريات للتعبير عن مجمل الطرائق الرياضية التي تناقش وتحلل هذه المباريات .

يعتبر العالم الفرنسي اميل بوريل Emile Borel أول من طرح الفكرة سنة 1921 إلا أن الفضل الأكبر في إرساء أركان هذه النظرية وبرهنة نتائجها الأساسية بطرق رياضية وإظهار الإمكانات الهائلة لها في التطبيق في المجالات الاقتصادية والإدارية يرجع إلى العالمين جون فون فيومان John von neuman ومورجانسترن فبعد أن أثبت جون نيومان القانون للنظرية (قانون أقل الأكبر Minimax) عام 1928 ، تعاون مع مورجانسترن في تقديم النظرية كأداة لتحليل المواقف التنافسية المتعارضة في المجالات الاقتصادية والحربية عام 1944 حيث قدما عملاً مشتركاً تمثل في كتاب اسمه " نظرية المباريات والسلوك الاقتصادي " (Theory of Games and Economic Behavior) وتكمن أهمية كتابهما هذا في أنه قام بتغطية جيدة للموضوع وبأنه تزامن مع ظهور طريقة السمبلكس على يد العالم دانتزج Dantizig التي مكنت من تقديم طريقة ناجحة لحل العديد من المباريات الكبيرة والمعقدة . ومنذ ذلك الحين وحتى وقتنا هذا لم يتوقف سيل الإضافات والتطوير ومحاولات التغلب على مشاكل التطبيق ومن أهم الإضافات التي فتحت آفاقاً جديدة للتطبيق ، هي نتائج دراسات ناش (Nash) وشابلي (Shapley) حيث قدم الأخير الدالة المعروفة بدالة قيم شابلي ، والتي على أساسها تتحدد عائد المباريات متعددة الأطراف لكل من المشاركين فيها بصور فريدة ، وتعتبر نظرية المباريات وسيلة للنظر في مسائل الصراع الأكثر إثارة في الحاضر والمستقبل . ومع أنها لا تضمن تقديم الحلول لجميع مسائل الصراع إلا أنها تقدم الوسائل والطرق الأكثر فعالية لتحليل ودراسة هذه المسائل . وسوف نقدم في هذا الفصل المباديء الأساسية للنظرية مع شرح بعض مجالات التطبيق .

تعاريف ومفاهيم أساسية :

اللعبة (Game) : هي مجموعة قواعد تحدد ما يجب أو يستطيع أن يفعله اللاعب هذه القواعد تعرّف المعلومات المتوافرة لدى كل لاعب وعدد الخطوات ونهاية المباراة التي يأخذها أو يعطيها أي لاعب .... الخ .

قواعد اللعبة : هي مجموعة من القواعد الموضوعة مسبقاً والتي تحدد جميع التحركات في هذه اللعبة والعوائد المقابلة لها .

المباراة Play : هي تطبيق خاص لقواعد اللعبة يؤدي في النهاية إلى نتيجة معينة . يتم دفع العوائد أو المدفوعات payments التي تأخذ صورة تحقيق هدف معين أو كسب عدد من النقاط ... الخ .

اللاعب player : هو وحدة مستقلة لاتخاذ القرار وليس من الضروري أن يكون اللاعب شخصاً فرداً وإنما قد يكون شركة أو مؤسسة أو فريقاً أو جيشاً أو دولة .

العائد Payoff : لكل لعبة عائد معين يتم التعبير عنه على شكل ربح أو خسارة أو منفعة (utility) وهذا العائد له علاقة بالاستراتيجيات التي يتم اختيارها من كافة اللاعبين .

الخطوة move : هي النقطة التي يتوجب فيها على اللاعب اتخاذ قرار الاختيار (البديل) وهناك نوعين من الخطوة :

1 ــ الخطوة الشخصية Personal move : هي اختيار مدروس وواعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب .

2 ــ الخطوة العشوائية Chance move : هي اختيار غير واعي لأحد البدائل المتاحة أمام اللاعب وذلك طبقاً لتوزيع احتمالي معين بواسطة قواعد المباراة .

ونقــول عن المباراة أنها بمعلومات كاملة (Perfect Information) إذا كانت الخطوات شخصية مثل لعبة الشطرنج ونقول عن المباراة أنها بمعلومات غيــر كاملــة (Imperfect Information) إذا كانت الخطوات عشوائية مثل لبعة الدومينو . وبتعبير آخر : تكون المباراة ذات معلومات كاملة إذا كان بمقدور اللاعبين أن يعرفــوا جميــع الخطوات التي وقعت مسبقاً .

الاستراتيجية Strategy : هي مجموعة من السياسات والخطط التــي تــصف تحركات المتنافسين والتي سيقومون بها خلال المباراة . وهي معيــار قــراري تأخــذ بالحسبان مجموعة القواعد التي تحــدد اختيار اللاعب في كل خطــوة يخطوهــا فــي المباراة .

وهناك نوعين من الاستراتيجيات :

1 ــ الاستراتيجية الصرفة أو الخالصة البحتة Pure strategy

وهي الاستراتيجية التي يمارسها اللاعب طوال وقت المباراة أو المعيار القراري الدائم لاختيار نفس طريقة اللعب طوال المباراة .

2 ــ الاستراتيجية المختلطة أو المركبة Mixed strategy

وهي المعيار القراري الذي يحدد التصرف الذي يجب أن يسلكه متخــذ القــرار بالاعتماد على مجموعة محددة من الاحتمالات ، وبكلام آخر هي التوزيــع الاحتمــالي الذي يخصص احتمالات محددة لاختيار كل من الاســتراتيجيات البحتــة حيــث يــتم تخصيص نسبة معينة من المرات (احتمال معين) التي يتم فيها تطبيق كل مــن هــذه الاستراتيجيات بحيث يكون مجموع هذه النسب (مجموع الاحتمالات) مساوياً الواحد .

(2 ــ 2) تصنيف المباريات

تصنيف المباريات عادة إما حسب عدد اللاعبين المشاركين في المباراة أو عدد الاستراتيجيات أو حسب نتيجة المباراة أو حسب طبيعة المباراة .

- فحسب عدد اللاعبين تقسم إلى نوعين :

1 ــ مباراة ذات شخصين : أي أن عدد المشاركين (اللاعبين) في المباراة اثنان فقط .

2 ــ مباراة متعددة الأطراف : أي أن عدد المشاركين (اللاعبين) في المباراة أكثر من اثنين .

- وحسب الاستراتيجيات تقسم المباريات إلى نوعين أيضاً :

1 ــ مباراة محددة : وهي المباراة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب محدوداً .

2 ــ مباراة مستمرة (غير محددة) : وهي المباراة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات المتاحة أما كل لاعب غير محدود أي لا نهائياً .

- أما حسب نتيجة المباراة فتقسم إلى نوعين أيضاً :

1 ــ مباراة ذات مجموع صفري : وهي المباراة التي يكون فيها ربح اللاعب الأول يساوي تماماً خسارة اللاعب الآخر أو التي يكون فيها مجموع القيم المتبادلة ثابتاً .

2 ــ مباراة ذات مجموع غير صفري : وهي المباراة التي يكون فيها ربح أحد اللاعبين لا يساوي خسارة اللاعب الآخر وإنما يمكن أن يخسر الطرفين أو يكسبا نتيجة المباراة أو يمكن أن يكسب أحدهما ويخسر الآخر . ويمكن أن تقوم مثل هذه المباريات على أساس التنافس أوالتعاون بين اللاعبين .

- أما حسب طبيعة المباراة فتقسم إلى نوعين هما :

1 ــ مباريات غير تعاونية (Noncooperative) : حيث لا يوجد أي تنسيق أو تعاون أو تفاوض بين اللاعبين ويسعى كل لاعب عندها لجعل عوائده أكبر ما يمكن .

2 مباريـــات تعـــاونية (Cooperative) : حيث يمكن أن يوجد تنسيق أو تعاون أو تفاوض بين اللاعبين يؤول إلى زيادة العوائد الكلية أو العوائد المتوقعة لكـــل منهم .

المثال البسيط التالي يعطي فكرة عن بعض المصطلحات الواردة أعلاه :

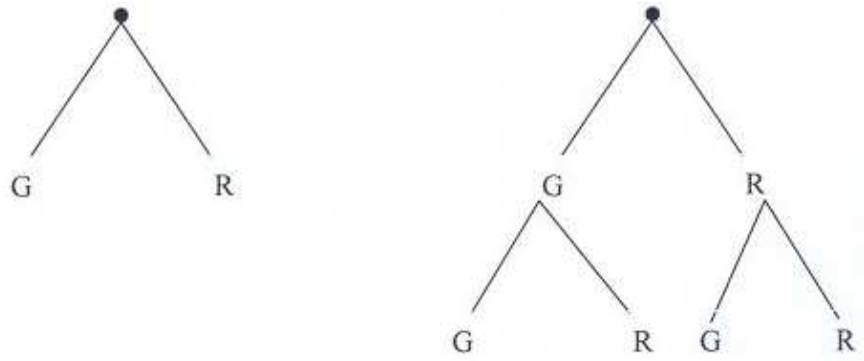
مثال (1 ــ 1) يتبارى شخصان (لاعبان) في اللعبة التالية :

يقوم اللاعب الأول باختيار أحد اللونين أخضر أو أحمر ودون يعلن عن اختياره ، ثم يقوم اللاعب الثاني باختيار أحد اللونين أخضر (G) أو أحمر (R) لكنه لا يعلن عن اختياره (يبقى صامتاً) . يعود بعدها اللاعب الأول إلى اختيار أحد اللونين أخضر أو أحمر فإذا كانت الخيارات متطابقة الألوان فإن اللاعب الأول يربح 1 $ من اللاعب الثاني و إلا فإن اللاعب الثاني يربح 1 $ من اللاعب الأول .

نلاحظ أن هذه اللعبة هي لعبة ذات شخصين وذات مجموع صفري Two Zero-sum Game إذ أن ما يربحه أحد اللاعبين يساوي تماماً ما يخسره اللاعب الآخر . كما نلاحظ أنه قد تم تحديد قواعد اللعبة ، وسوف نقوم بدراسة وتحليل هذه المباراة من خلال تحديد كلاً مما يلي .

الاستراتيجيات :

نلاحظ أن اللاعب الأول يلعب على مرحلتين يختار في المرحلة الأولى G أو R ويختار في المرحلة الثانية كذلك G أو R . أما اللاعب الثاني فيلعب مرحلة واحدة يختار فيها G أو R . ويمكن تمثيل اختيارات اللاعبين كما في الشكل (1 ــ 1) .



اختيار اللاعب I اختيار اللاعب II

شكل (1 ــ 1)

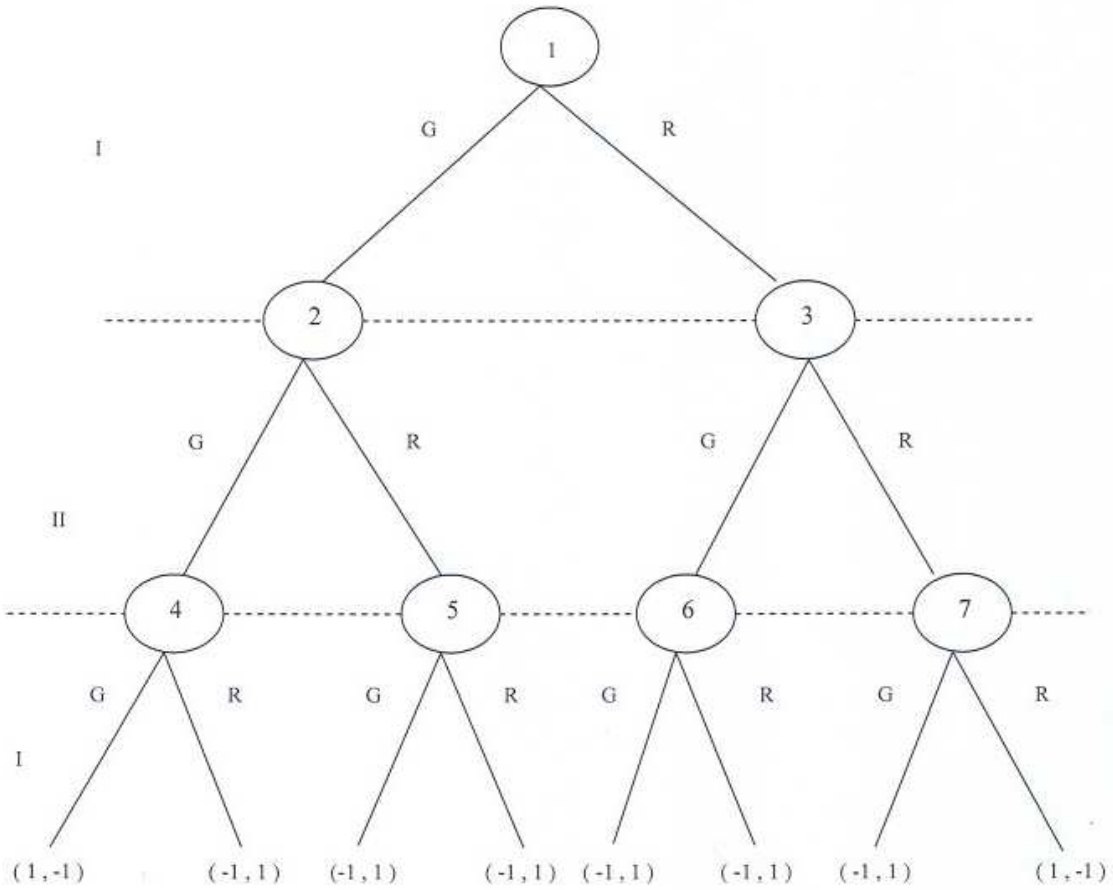
نقول في هذه الحالة إن الاستراتيجيات الممكنة للاعب I هي :

(G , G) , (G , R) , (R , G) , (R , R)

وسنرمز لها بالرموز I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4 على الترتيب ، أما استراتيجيات اللاعب II فهي G , R وسنرمز لها بالرمزين II_1 ، II_2 على الترتيب .

شجرة المباراة (Tree of the Game) :

هي شجرة تشبه شجرة القرار ونضع فيها جميع اختيارات اللاعب الذي يبدأ اللعب في المرحلة الأولى (وسنسميه اللاعب الأول) ومقابل كل من هذه الخيارات نضع اختيارات اللاعب الآخر للمرحلة الأولى ومقابل هذه الخيارات الأخيرة نضع كل الخيارات للاعب الأول (الذي بدأ اللعبة) للمرحلة الثانية إن وجدت وهكذا ... فنحصل على شكل أشبه بالشجرة ثم نضع مقابل كل فرع نهائي لهذه الشجرة عوائد اللاعبين على الشكل (a, b) بحيث أن **a** هي عوائد اللاعب الأول و b عوائد اللاعب الثاني . وفي حال مباريات الشخصين ذات المجموع الصفري فإن $a + b = 0$ (وبالتالي $b = -a$) فمثلاً شجرة المباراة للمثال (1 ــ 1) هي كما في الشكل (1 ــ 2) .



شكل (1 ــ 2) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 1)

مصفوفة المباراة Matrix of Game

إذا كان عدد استراتيجيات اللاعب I هي m وعدد استراتيجيات اللاعب الثـاني هي n [في مثـال (1 ــ 1) لدينا m = 4 و n = 2] فـإننا نشـكل مصفوفة من m سـطر و n عمـود نضع فيها العـوائد المقابلة للاستراتيجيات (I_i , II_j) حيث $i = 1, 2, \ldots, m$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ ونسميها مصفوفة المباراة .

ففي مثالنا (1 ــ 1) أعلاه فإن مصفوفة المباراة هي (راجع شجرة المباراة).

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} \begin{array}{c} II_1 \\ \begin{bmatrix} (1,-1) \\ (-1,1) \\ (-1,1) \\ (-1,1) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} II_2 \\ \begin{bmatrix} (-1,1) \\ (-1,1) \\ (-1,1) \\ (1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

وفي حال مباريات الشخصين ذات المجموع الصفري كما في المثال (1 ــ 1) أعلاه فإن النتيجة (a, b) تعني أن b = -a ولذا فقد اصطلح على كتابة النتيجة (a, -a) على الشكل a أي العوائد العائدة للاعب I فقط أما عوائد اللاعب الثاني II فهي معروفة ضمناً . وبذلك فإن المصفوفة أعلاه تكتب على النحو التالي :

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array} \begin{array}{c} II_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} II_2 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

لاحظ أنه يمكننا جعل هذه المباراة ذات مجموع ثابت a مثلاً وذلك بإضافة $\frac{a}{2}$ لعوائد كل من اللاعبين . فلو أضفنا 3 لعوائد كل من اللاعبين لكان مجموع العائد في كل عناصر مصفوفة المباراة مساوياً 6 ومن هنا يقال عن المباريات ذات المجموع الصفري أنها ذات مجموع ثابت أيضاً

وكمثال على مباريات لشخصين ذات مجموع غير صفري نسوق المثال البسيط التالي :

مثال (1 ــ 2)

قامت الشرطة بتوقيف شخصين بتهمة سرقة أحد محلات المجوهرات في السوق معاً وقد تم استجواب كل من الشخصين على حدة . ونظراً لسوابق هـذين الشخـصين فإنهما يعلمان أنه إذا لم يعترف أحدهما بشيء ، فلا يوجد دلائل كافيـة عليـه لاثبـات تورطه في السرقة وعندئذٍ سيتم الحكم عليـه بـسجن سـنة . وإذا اعتـرف كلاهمـا باشتراكهما بالسرقة فإنه سيتم الحكم على كل منهما بالسجن لـ 9 سـنوات . أمـا إذا اعترف أحدهما بالسرقة ولم يعترف الآخر فسيتم الحكـم على المعترف بالسجن لمـدة 10 سنوات وسيتم إطلاق سراح الآخر . المطلوب تحليل هذه اللعبة (المباراة) .

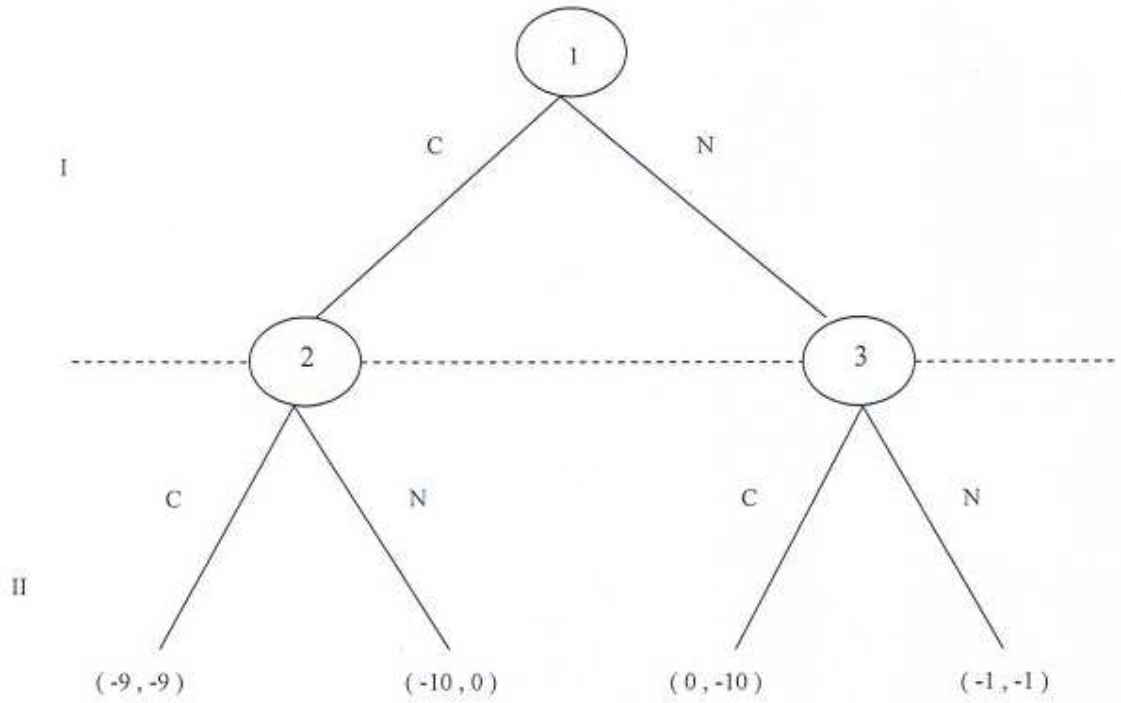
نلاحظ أن هذه اللعبة هي ذات شخصين (لاعبين) سنرمز لهما بـالرمز I و II وهي ذات مجموع غير صفري كما سنرى أدناه .

الاستراتيجيات :

نلاحـظ أن اللاعـب I يمتلك استراتيجيتين هما : I_1 الاعتراف C (confess) و I_2 الإنكار N (not confess) . كذلك فإن اللاعب الثاني يمتلك استراتيجيتين هما : II_1 الاعتراف C و II_2 الإنكار N .

شجرة المباراة :

على ضـوء البيانـات أعلاه فإن شجرة المباراة لهذه اللعبة هي كما في الشكل (1 ــ 3) .



شكل (1 ــ 3) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 2)

مصفوفة المباراة :

يتضح مما سبق أن المباراة ذات مجموع غير صفري وأن مصفوفتها معطاة بما يلي :

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} II_1 & II_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (-9,-9) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

الاستراتيجيات البحته (Pure strategies) والاستراتيجيات المختلطة (Mixed strategies)

لو عدنا إلى المثال (1 ــ 1) أعلاه نجد أن اللاعب I يملك 4 استراتيجيات ، ويملك اللاعب الثاني استراتيجيتان يشار لمثل هذه الاستراتيجيات على أنها استراتيجيات بحته أو خالصة .

على أن الحل الأمثل للاعبين قد لا يكون باختيار أحدهما لاستراتيجية بحته فلو تكررت اللعبة عدداً من المرات (100 مرة مثلاً) فإن اللاعب الأول مثلاً قد يجد أن عائده سيكون أفضل فيما لو قام يلعب كل من استراتيجياته الأربع نسبة من المرات الـ 100 التي تتكرر فيها اللعبة كأن يلعب الاستراتيجية I_1 بـ 50 % من المرات ويلعب الاستراتيجية I_2 بـ 40 % من المرات ويلعب كلاً من الاستراتيجيتين I_3 و I_4 بنسبة 5 % من المرات (المجموع = 100 %) ونقول في هذه الحالة إن لدى اللاعب الأول الاستراتيجية المختلطة التالية (I_1, I_2, I_3, I_4) بالاحتمالات (5 % ، 5 % ، 40 % ، 50 %) أو (0.05 ، 0.05 ، 0.4 ، 0.5) (المجموع يساوي 1) .

بالمثل إذا لعب اللاعب الثاني الاستراتيجية II_1 بنسبة 70 % مثلاً ولعب الاستراتيجية II_2 بنسبة 30 % من المرات قلنا إن لدى اللاعب الثاني الاستراتيجية المختلطة (0.3 ، 0.7) لـ (II_1 , II_2) (المجموع يساوي 1) .

ولعل أهم فائدة لاستخدام الاستراتيجيات المختلطة هو أنها (وكما سنرى) تضمن وجود حل للعديد من المباريات (كالمباريات ذات المجموع الصفري) مثلاً ولكن عيبها الرئيسي يكمن في أن بعض المباريات لا تتكرر أكثر من مرة كما هي الحال في بعض النزاعات العسكرية ومع ذلك فإن هناك العديد من المباريات التي تتكرر فيها السياسات المتوافرة لدى أطراف النزاع كتلك التي تقع بين الشركات المتنافسة .

في الأمثلة أعلاه كان اختيار أي من اللاعبين لاستراتيجية معينة مبني على اختيار مدروس لأحد الاستراتيجيات المتاحة . لكننا نواجه بعض الألعاب التي تتعلق بالحظ حيث لابد لنا عندئذٍ من إدخال العناصر الاحتمالية المقابلة وحيث نتحدث عندها عن القيم المتوقعة المقابلة للاستراتيجيات المتاحة وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (1 ــ 3)

يقــوم كل من اللاعبين A و B بوضع 1 $ في وعاء ليبــدءوا بعــدها اللعبــة التالية . توجد بطاقتان أحدهما تحمل الرمز H والأخرى تحمل الرمز L موضــوعتان على طاولة بطريقة تخفي رمز كل منهما . يقوم اللاعب A باختيار إحدى البطــاقتين ، وبعد النظر إليها يقوم بوضع إما 2 $ أو 4 $ في الوعاء . أما خيارات اللاعب B فهي إما أن ينسحب ويخسر الدولار الذي وضعه بداية في الوعاء أو أنه يضع نفس المبلــغ الذي وضعه اللاعب A في الوعاء (أي إما 2 $ أو 4 $) وينظر إلى البطاقــة التــي سحبها A . فإذا كانت البطاقة هي التي تحمل الرمز H فإن اللاعب B يــربح كامــل المبلغ المتجمع في الوعاء و إلا فإن اللاعب A يربح هذا المبلغ .

فلرسم شجرة المباراة في مثل هذه اللعبة نبدأ بعقدة تسمى عــادة عقــدة الحــظ (chance node) يتفرع عنها الحادثين H (الذي يقابل أن تكون البطاقة المسحوبة هي التي تحمل الرمز H) والحادث L (وهو الذي يقابل كون البطاقة المــسحوبة تحمــل الرمز L) . وكما نلاحظ فإن احتمال كل من هذين الحادثين هو $\frac{1}{2}$. وينظر إلى عقدة الحظ هذه كما لو أنها لاعب ثالث هو الطبيعة Nature وبموجب معطيات اللعبة وبعــد وقوع أحد الحادثين H أو L فإن أمام اللاعبين A و B الاستراتيجيات الموضحة أدناه :

A_1 : أن يضع 2 $ إذا كانت البطاقة H و 2 $ إذا كانت البطاقة L .

A_2 : أن يضع 2 $ إذا كانت البطاقة H و 4 $ إذا كانت البطاقة L .

A_3 : أن يضع 4 $ إذا كانت البطاقة H و 2 $ إذا كانت البطاقة L .

A_4 : أن يضع 4 $ إذا كانت البطاقة H و 4 $ إذا كانت البطاقة L .

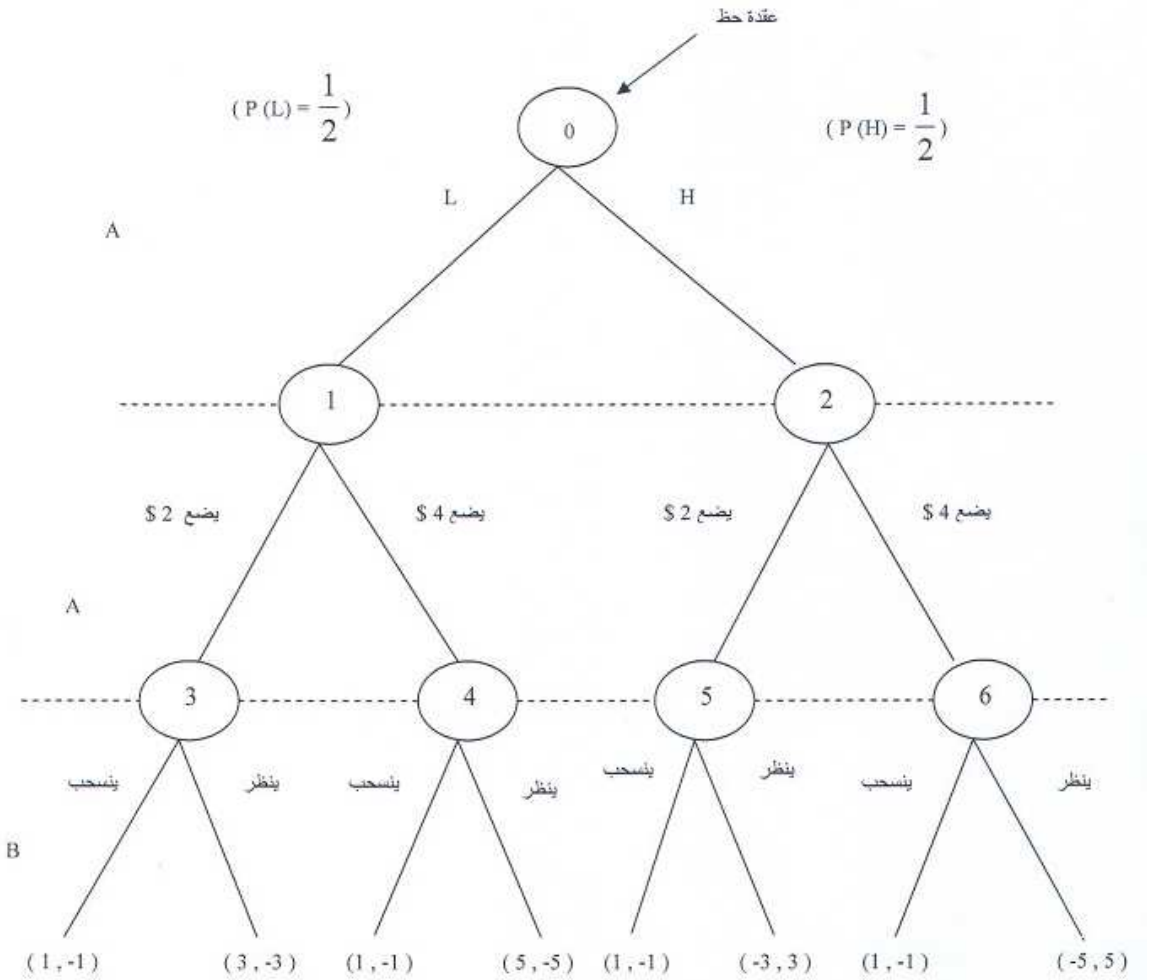
B_1 : أن ينسحب إذا وضع A (2 $) وينسحب إذا وضع A (4 $) .

B_2 : أن ينسحب إذا وضع A (2 $) وينظر إذا وضع A (4 $) .

B_3 : أن ينسحب إذا وضع A (4 $) وينظر إذا وضع A (2 $) .

B_4 : أن ينظر إذا وضع A (2 $) وينظر إذا وضع A (4 $) .

وتكــون شــجرة المبــاراة المقابلة في هــذه الحــالة على النحو المبين بالشكل (1 ــ 4) :



شكل (1 ــ 4) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 3)

ومن الواضح أن هذه المباراة ذات مجموع صفري .

لكن مصفوفة المباراة في هذه الحالة تتكون من القيم المتوقعة للنتائج المقابلة للاستراتيجيات المختلفة . فلو رمزنا بـ e_{ij} للقيمة المتوقعة المقابلة للاستراتيجية (A_i , B_j) حيث $i, j = 1, 2, 3, 4$ فبالنسبة لمثالنا .

e_{11} = القيمة المتوقعة للاستراتيجية (A_1, B_1) أي القيمة المتوقعة

عندما يضع A , 2 $, وينسحب B ، وكما هو ملاحظ من الشجرة أعلاه فـــإن هذا الأمر يقع مرتين الأولى عندما يقع الحادث H والقيمة المتوقعة المقابلة (اعتمـــاداً على نتائج الشجرة) هي $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ والثانية عندما يقع الحادث L والقيمـــة المتوقعـــة المقابلة هي $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وبذلك فإن $e_{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. وبالمثل نجد النتائج التالية :

$$e_{12}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1, e_{13}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-3)=0 \ , \ e_{14}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-3)=0$$

$$e_{21}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1, e_{22}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(5)=3, e_{23}=\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{2}(1)=-1$$

$$e_{24}=\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{2}(5)=1, e_{31}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1, \ e_{32}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-5)=-2$$

$$e_{33}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(1)=2, e_{34}=\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-5)=-1, e_{41}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1$$

$$e_{42}=\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(-5)=0, e_{43}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(1)=1, e_{44}=\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(-5)=0$$

وبذلك فإن مصفوفة المباراة لمثال (1 ــ 3) هي :

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	1	0	0
A_2	1	3	-1	1
A_3	1	-2	2	-1
A_4	1	0	1	0

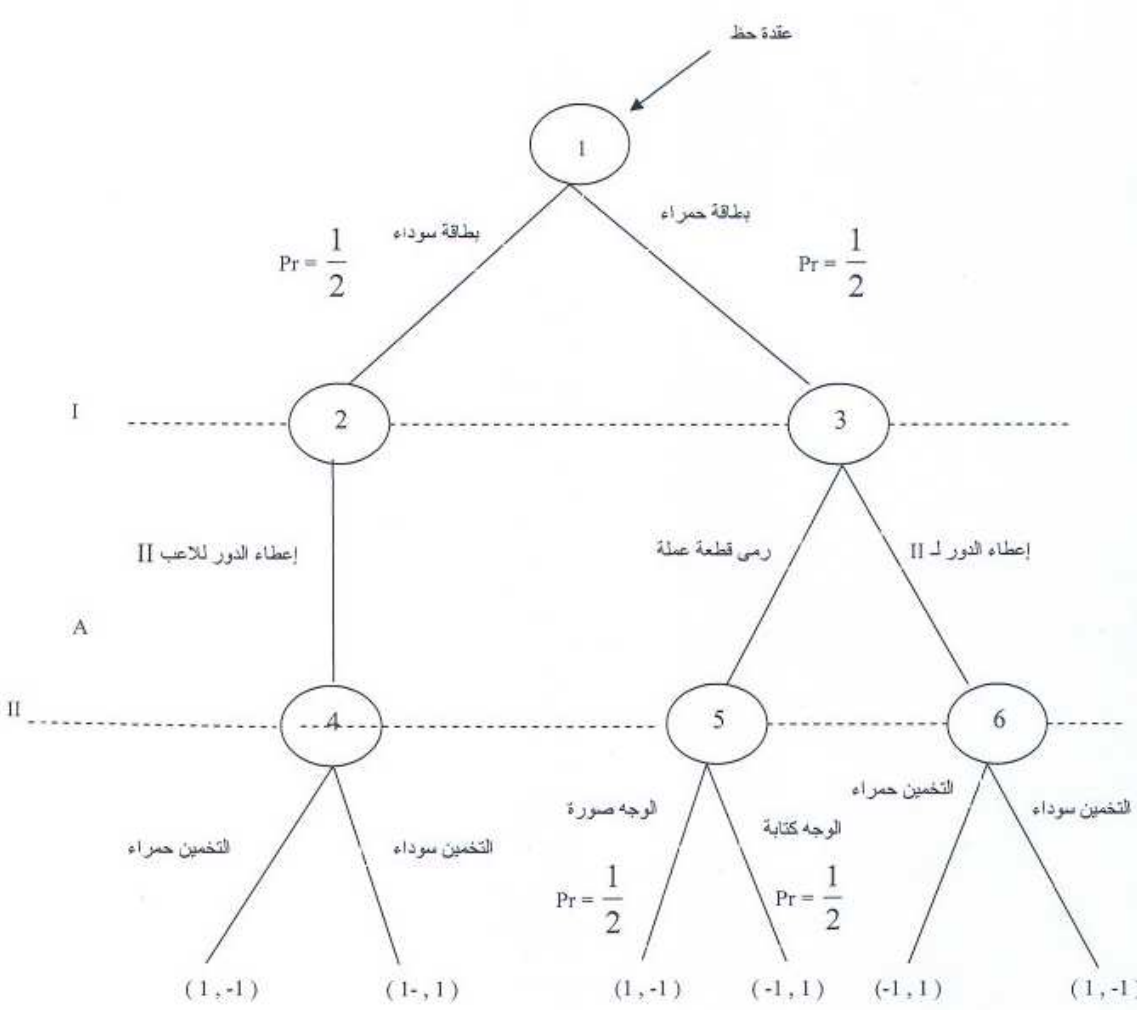
وتجدر الملاحظة هنا إلى أن مجموع الاحتمالات التي تنشأ عـــن عقـــدة الحـــظ المشار إليها أعلاه يجب أن يكون مساوياً الواحد . ولمزيد من الإيضاح لهـــذه النقطـــة نسوق المثال التالي :

مثال (1 ــ 4)

بطاقتان أحدهما حمراء R والأخرى سوداء B وهما موضوعات علـــى طاولـــة بطريقة تخفي لون كل منهما . يقوم اللاعب I بسحب إحدى البطاقتين والنظر إليها دون أن يعلن ذلك للاعب المنافس II . فإذا كانت البطاقة التي سحبها اللاعب I حمراء فإن أمامه خيارين هما أن يعطي دور اللعب لمنافسه II أو أن يرمي قطعة عملة متوازنـــة . أما إذا كانت البطاقة سوداء فلا يوجد أمام اللاعب I سوى خيار وحيد وهو أن يعطـــي دور اللعب لمنافسه II . وعندما يأخذ اللاعب II دوره في اللعب فإن عليـــه أن يقـــوم بتخمين لون البطاقة التي سحبها اللاعب I هل هي حمراء أو سوداء فإذا كان تخمينـــه صحيحاً فإنه يربـــح 1$ من اللاعب I و إلا فإن اللاعب I يربح منه 1$. أما عنـــدما يختار اللاعب I رمي قطعة العملة فإن قواعد اللعبة تقتضي أن يربح 1$ من اللاعب II إذا ظهر الوجه الصورة و إلا فإن اللاعب II يربح 1$ مـــن اللاعـــب II . المطلـــوب تحليل هذه اللعبة .

شجرة المباراة :

بناءً على المعلومات الواردة في المثال فإن شجرة المباراة معطاة كما في الشكل (1 ــ 5) .



شكل (1 ــ 5) . شجرة المباراة لمثال (1 ــ 4)

الاستراتيجيات :

بموجب معطيات المثال فإن لدى اللاعب I استراتيجيتان هما : I_1 : إعطاء دور اللعب لـــ II مهما كان لون البطاقة . I_2 : رمي قطعة عملة متوازنة إذا كانت حمـــراء وعندما يعطي اللاعب II دور اللعب فلديه استراتيجيتان هما II_1 : أن يخمن أن البطاقة التي سحبها I حمراء أو II_2 : أن يخمن أن البطاقة التي سحبها I سوداء .

تجدر الإشارة إلى أنه يمكن النظر إلى الحوادث التي تنتج عن عقد الحظ في مثل هذه الأمثلة كما لو أنها استراتيجيات للاعب هو لاعب " الطبيعة Nature " وهذه الاستراتيجيات هي :

N_1 : أن تختار الطبيعة البطاقة الحمراء وتختار قطعة العملة ظهور الوجه الصورة وهما حادثان مستقلان احتمال كل منهما $\frac{1}{2}$ فاحتمال هذه الاستراتيجية (أو هذا الحادث) هو $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

N_2 : أن تختار الطبيعة البطاقة الحمراء وتختار قطعة العملة ظهور الوجه الكتابة وهما أيضاً حادثان مستقلان احتمال كل منها $\frac{1}{2}$ فاحتمال هذه الاستراتيجية (أو هذا الحادث) $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

N_3 : أن تختار الطبيعة البطاقة السوداء واحتمال هذه الاستراتيجية (هذا الحادث) هو $\frac{1}{2}$. لاحظ أن مجموع احتمالات الحوادث التي تنتج عن اختيارات (استراتيجيات) لاعب الطبيعة يساوي $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

مصفوفة المباراة :

قبل إيجاد مصفوفة المباراة نلاحظ أن استراتيجيات اللاعب الأول يمكن إعطاؤها بشكل أكثر وضوحاً كما يلي :

I_1 = — { إذا كانت البطاقة حمراء فأعط دور اللعب لـ II . / إذا كانت البطاقة سوداء فأعط دور اللعب لـ II . }

و I_2 = — { إذا كانت البطاقة سوداء فأعط دور اللعب لـ II . / إذا كانت البطاقة حمراء فارم قطعة عملة متوازنة . }

وبذلك فإن :

$$e_{21}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-1)=\frac{1}{2} \quad , \quad e_{12}=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0,$$

$$e_{11}=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(-1)=0 \quad , \quad e_{22}=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=-\frac{1}{2}$$

ومصفوفة المباراة هي :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ملاحظة (1 ــ 1)

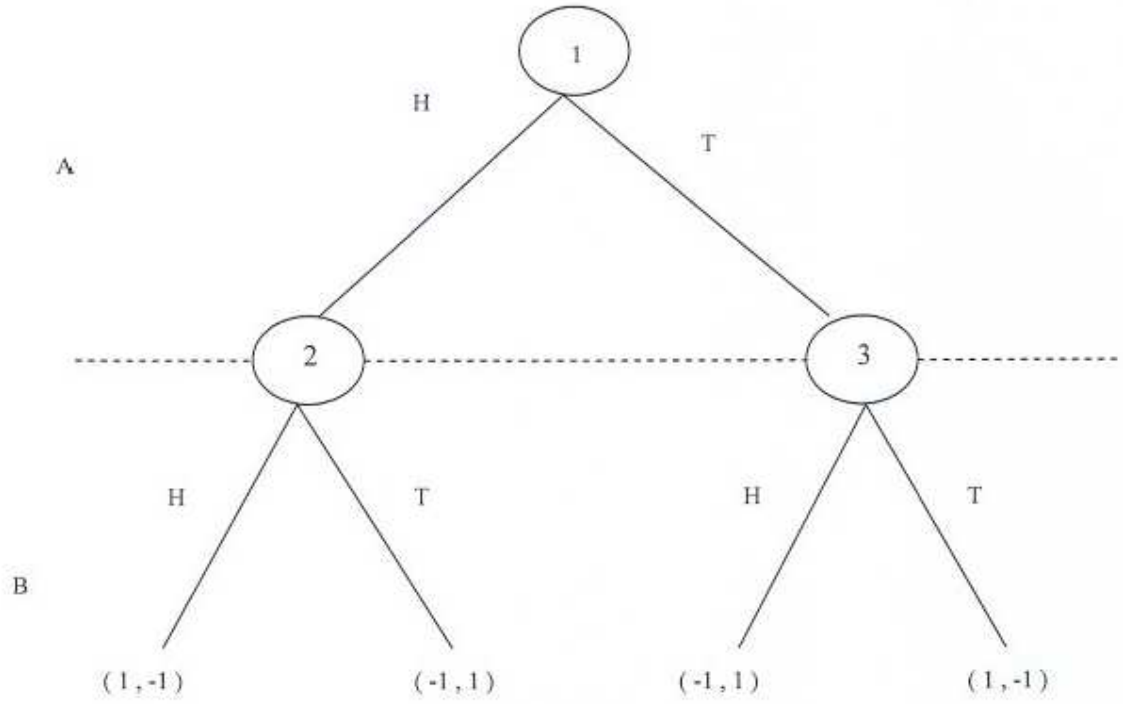
ثمة شيء يجب التنويه عنه هو ما سنطلق عليه مجموعة المعلومات (Information set) . ففي المثال (1 ــ 3) نجد أن اللاعب B لا يعرف بالضبط مقدار ما وضعه اللاعب A في الوعاء ولكنه يعرف أنه وضع 2 $ وهذا يقابل العقدتين (3) و (5) أو وضع 4 $ وهذا يقابل العقدتين (4) و (6) . نسمي كلا المجموعتين { (5) ، (3) } و { (6) ، (4) } بـ مجموعة معلومات . وكذلك فإن المجموعة { (6) و (4) } في مثال (1 ــ 4) هي مجموعة معلومات لأن اللاعب II يعرف أن دور اللعب قد أعطي له لكنه لا يعرف لون البطاقة التي سحبها I .

ولتوضيح أهمية مجموعة المعلومات نسوق المثال البسيط التالي :

مثال (1 ــ 5)

لنفرض أن اللاعبين A و B لعبا اللعبتين التاليتين :

اللعبة الأولى : لدى كل من اللاعبين قطعة عملة ويبدأ اللاعب A باختيار الوجه H أو الوجه T دون أن يعلن عن اختياره ثم يقوم بعدها اللاعب B باختيار H أو T ، فإذا توافقت الاختيارات فإن اللاعب A سيربح 1 $ (من B) و إلا فإن اللاعب B يربح 1 $ من A . عندئذٍ تكون شجرة المباراة لهذه اللعبة كما هي مبينة في الشكل (1 ــ 6) .



شكل (1 ــ 6) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 5) اللعبة الأولى

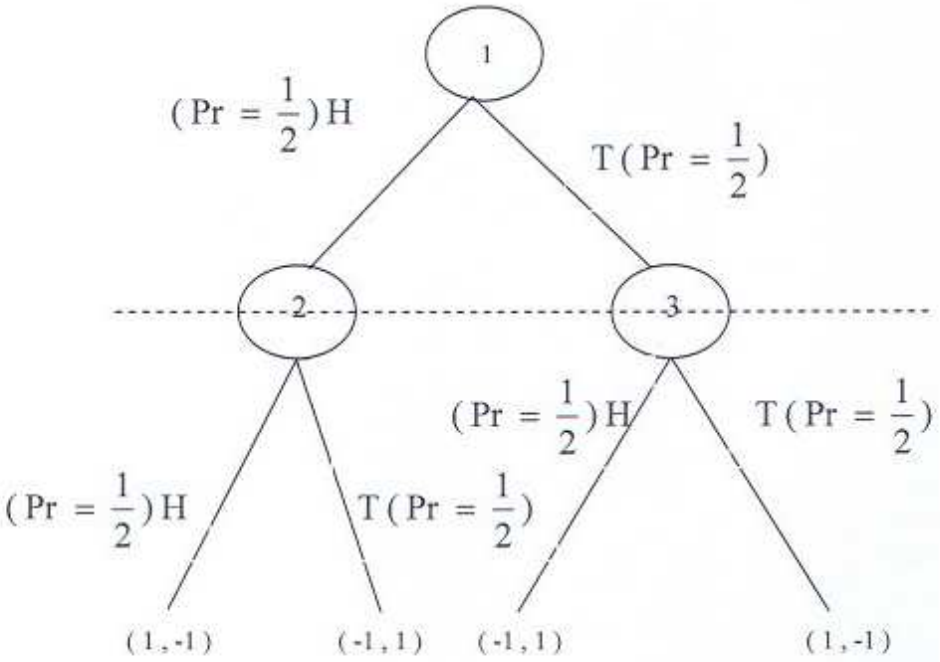
ومصفوفاتها هي (لاحظ أن المباراة ذات مجموع صفري) :

$$A \begin{matrix} \\ H \\ T \end{matrix} \begin{matrix} B \\ H \quad\quad T \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

وهنا نعتبر المجموعة { (3) ، (2) } مجموعة معلومات حيث يعرف اللاعب B أنه إما في (2) [تقابل الاختيار H للاعب A] أو في (3) [تقابل الاختيار T للاعب A] ولكنه لا يعرف أين هو بالضبط و إلا فإنه سيبني اختياره لاستراتيجياته على هذه المعرفة . يقال عن هذا النوع من المباريات بأنها ذات معلومات غير كاملة (Imperfect Information) كما سبق وأشرنا .

اللعبة الثانية : يقوم اللاعب A بقذف قطعة عملة متوازنة ثم يقوم بعدها اللاعب B بقذف هذه القطعة وقد اتفق اللاعبان على أنه إذا توافقت النتائج فإن A سيربح 1 $ (من B) وإذا اختلفت النتائج فإن B سيربح 1 $ (من A) . فهذه المباراة ذات مجموع صفري .

إن شجرة المباراة هذه اللعبة المعطاة في شكل (1 ــ 7) تشبه إلى حد كبير شجرة اللعبة الأولى مع الفارق الرئيسي بأن اللاعب B يعرف أين هو بالضبط أي يعرف أنه في العقدة (2) إذا ظهرت H أو العقدة (3) إذا ظهرت T ولذا فلا معنى هنا لوجود ما أسميناه مجموعة المعلومات . ويقال عن هذا النوع من المباريات أنها بمعلومات كاملة (Perfect information) كما سبق وأشرنا .



شكل (1 ــ 7) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 5) اللعبة الثانية

وللحصول على مصفوفة المباراة لابد لنا هنا أن نوجد القيم المتوقعة e_{ij} التي يحصل عليها اللاعب A مقابل الاستراتيجية (A_i , B_j) ($i = 1, 2$ و $j = 1, 2$) فنجد أن :

$$e_{11} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} \quad , \quad e_{12} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times -1 = -\frac{1}{4},$$
$$e_{21} = \frac{1}{2} \times 1 \times -1 = -\frac{1}{4} \quad , \quad e_{22} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$

فهذه مصفوفة هي :

$$\begin{array}{c} \\ A \end{array} \begin{array}{c} \\ H \\ T \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{array}{cc} H & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

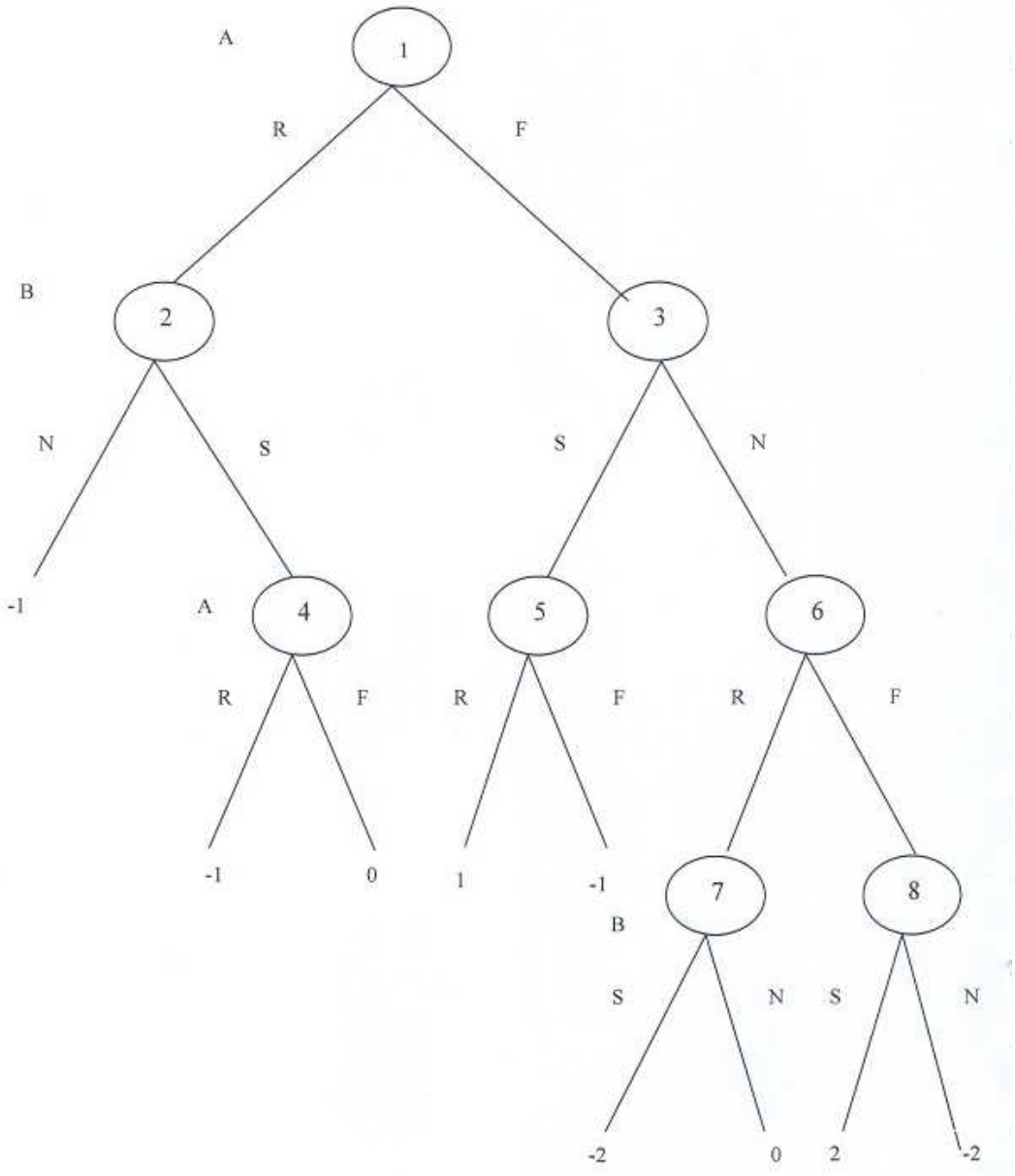
لاحظ هنا وجود أربع حوادث (استراتيجيات) تلعبها الطبيعة هـــي (H , H) ، (H , T) ، (T , H) ، (T , T) واحتمال كل منها هو $\frac{1}{4}$ (مجموعها = 1) .

ملاحظة (1 ــ 2)

يجب الانتباه كذلك إلى أننا لا نعتبر أي اختيار لأي من اللاعبين في أي مرحلة من مراحل اللاعب بأنه استراتيجية لذلك اللاعب ما لم يتبعه اختيار أو أكثـــر للاعـــب الخصم ولنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (1 ــ 6)

لنفرض أن لدينا مباراة ذات مجموع صفري لشخـــصين وأن شـــجرة المبـــاراة معطاة كما في الشكل (1 ــ 8) التالي :



شكل (1 ــ 8) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 6)

عندئذٍ تكون استراتيجيات اللاعب A هي :

(R, R) , (R, F) , (F, R) , (F, F)

واستراتيجيات اللاعب B هي :

$$S\ ,\ (N,\ N)\ ,\ (N,\ S)$$

لاحظ مثلاً أننا لم نحتسب الاختيار N للاعب الثاني B لأنه لم يتبعها أي اختيار للاعب A لكن الاستراتيجية المنفردة S احتسبت لأنه تبعها اختيار للاعب A .

ملاحظة (1 ــ 3)

يطلق على شجرة المباراة عادة اسم الصيغة الشاملة (Extensive form) نظراً لأنها تشمل كافة المعلومات والنتائج المتعلقة بالمباراة ، كما ويطلق على مصفوفة المباراة اسم الصيغة الطبيعية (Normal form) .

تمارين (1 ــ 1)

1 ــ يقوم اللاعبين A و B باللعبة التالية : يختار A أحد الرقمين 0 أو 1 دون أن يعلن عن اختياره ، ثم يقوم بعدها اللاعب B كذلك باختيار أحد الرقمين 0 أو 1 دون أن يعلن عن اختياره ، ثم يقوم A باختيار 0 أو 1 . فإذا كان مجموعة الأرقام الناتجة زوجياً فإن B يدفع لـ A قيمة هذا الناتج بالدولار و إلا فإن A يدفع لـ B (يعتبر 0 رقم زوجي) . المطلوب :

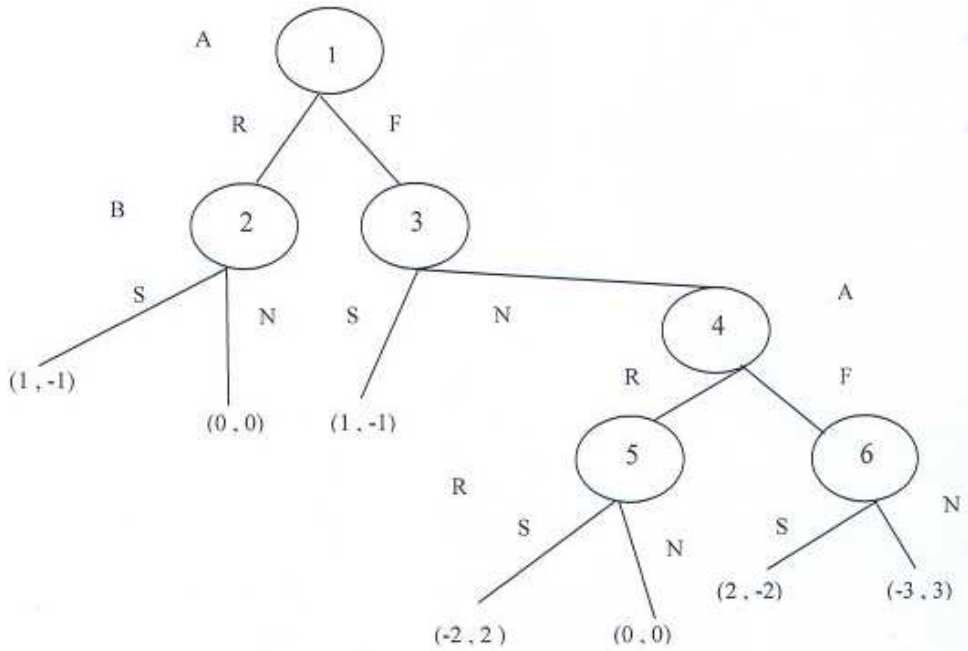
أ ــ رسم شجرة المباراة وتحديد مجموعات المعلومات إن وجدت .

ب ــ تحديد استرتيجيات كل من اللاعبين .

ج ــ إيجاد مصفوفة المباراة .

د ــ هل هذه المباراة ذات مجموع صفري أم لا ؟ .

2 ــ لنفترض أن المباراة بين شخصين A و B معطاة بالشجرة التالية :



المطلوب :

أ ــ إيجاد استراتيجيات كلاً من اللاعبين A و B ومصفوفة المباراة .

ب ــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

3 ــ تتألف قوة عسكرية A من ثلاثة ألوية مدرعة تقوم بالدفاع عن المدينة C من خلال مدخلين (طريقين) رئيسيين للمدينة حيث يتوقع أن تتم مهاجمة المدينة من قوة ثانية معادية B عبر أحد هذين المدخلين أو كليهما . تتألف القوة B من لواءين ويمكنها مهاجمة المدينة C إما بلواء عبر كل مدخل رئيسي أو باللواءين عبر أحد المدخلين . يمكن للقوة المدافعة A أن تقوم بالدفاع عن أحد المدخلين أو لواءين للدفاع عن أحد المدخلين ولواء للدفاع عن المدخل الآخر . وتقتضي قواعد اللعبة العسكرية أن تحصل القوة A أو القوة B من المكاسب ما يساوي إلى الفرق بين عدد ألويتها وعدد الألوية الخصم . والمطلوب :

أ ــ رسم شجرة المباراة على أنها ذات مجموع صفري .

ب ــ إيجاد استراتيجيات كل من القوتين A و B .

جـ ــ إيجاد مصفوفة المباراة الناتجة .

د ــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

4 ــ تتنافس شركتان لعرض منتجاتهما في اثنين من الأسواق الرئيسية في إحدى المدن ويتوقع أن يكون عدد الزبائن في السوق الأولى مساوياً 10000 وفي السوق الثانية 15000 ونتيجة للدراسة التي أجرتها كل من الشركتين فقد وجدتا ما يلي :

(I) إذا شاركتا في نفس السوق فيتوقع أن تبيع كل منهما بضاعتها إلى 40 % من الزبائن .

(II) إذا لم تشاركا بنفس السوق فيتوقع أن تبيع كل منهما بضاعتها إلى 75 % من الزبائن .

وتهدف كل شركة أن تجعل الفرق بين عدد زبائنها وزبائن الشركة الأخرى أكبر ما يمكن .

والمطلوب : إيجاد شجرة المباراة والاستراتيجيات والمصفوفة المقابلة للعبة المنافسة بين الشركتين . هل هذه المباراة ذات مجموع صفري ؟ . وهل هي ذات معلومات كاملة ؟ وضح إجابتك .

5 ــ تقوم شركتان بصناعة تلفزيونات ملونة وغير ملونة ، تستطيع الشركة الأولى صناعة إما 200 تلفزيون ملون في الأسبوع أو 200 تلفزيون غير ملون في الأسبوع. يقدر ربح كل وحدة بـ 30 $ لكل تلفزيون ملون و15 $ لكل تلفزيون غير ملون . تستطيع الشركة الثانية أن تصنع إما 200 تلفزيون ملون أو 400 تلفزيون غير ملون في الأسبوع . بستوعب السوق ما مقداره 200 تلفزيون ملون و 400 غير ملون ، ويتوقع أن تكون حصة كل من الشركتين بنسبة ما تنتجه كل منهما من كلال النوعين فمثلاً إذا أنتجت الأولى 200 تلفزيون ملون وأنتجت الأخرى 100 تلفزيون ملون فعندئذ تبيع الأولى $200\times\frac{200}{600}$ وتبيع الثانية $100\times\frac{200}{600}$. ارسم شجرة المباراة واكتب مصفوفتها .

6 ــ تتسابق شركتان A و B لتنفيذ أحد المشاريع . يبلغ معدل الضرائب القانوني السنوي للشركة A والخاصة بالمشروع $ 4000000 ، كما يبلغ معدل الضرائب السنوي للشركة B والخاصة بالمشروع $ 12000000 . ويمكن لكل

من الشركتين أن تسلك أحد خيارين ، فإما أن توافق علـــى المـــشروع وتـــدفع الضرائب المستحقة قانوناً أو أن تقوم بعملية تزوير لتبين أنه لا ضرائب مستحقة عليها . لكن مصلحة الضرائب يمكنها فقط أن تـــدقق مـــدخولات واحـــدة مـــن الشركتين كل عام فإذا تمكنت هذه المصلحة من تدقيق مدخولات الشركة الكاذبة فإنها ستتمكن من كشف التزوير وستقوم الشركة الكاذبة عندئذٍ بدفع مـــستحقاتها من الضـــرائب مضافاً إليها غرامة تساوي نصف الضرائب المـــستحقة عليهـــا قانوناً . أرسم شجرة المباراة للمشكلة وأوجد مصفوفتها .

7 ــ تحوي كل من علبتي كبريت عودين من الثقاب ، يقوم لاعبين A و B باللعبـــة التالية : يقوم اللاعب A بسحب عود أو عودين من الثقاب من واحدة فقط مـــن العلبتين ، ثم يتبعه بعد ذلك اللاعب B . واللاعب الخاسر هو الـــذي يـــسحب العود (أو العودين) الأخير (الأخيرين) ومقدار خسارته هـــو أن يـــدفع $ 2 للاعب الآخر . والمطلوب :

1 ــ ارسم شجرة المباراة .

2 ــ حدد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ــ أوجد مصفوفة المباراة .

4 ــ هل المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

8 ــ توجد على طاولة بطاقتا لعب ، أحدهما تحمل رقم 1 (أس) والأخرى رقم 2 . يقوم كل من اللاعبين A و B بوضع $ 1 في وعاء ثم يقوم A بسحب إحـــدى البطاقتين دون النظر إليها وإعطائها إلى B . فينظر إليها B فإذا كانت أس فعلى B أن يقول أنها أس ، أما إذا كانت 2 فيمكن لـــ B عندها أن يقـــول أس أو 2 فإذا قال 2 فإنه يخسر المباراة والـــ $ 1 في الوعاء أما إذا قال أس فعليه وضع $ 1 آخر في الوعاء وعندها يمكن لـــ A إما أن يصدق ما قاله B ويخسر الـــ $ 1 الذي وضعه بداية في الوعاء أو أن يطلب رؤية البطاقة . فإذا كانـــت أس فإن B سيربح المبلغ المتجمع في الوعاء أما إذا كانت 2 فإن A ســـيربح هـــذا المبلغ . المطلوب :

1 ــ رسم شجرة المباراة .

2 ــ تحديد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ــ إيجاد مصفوفة المباراة .

4 ــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ أوجد مجموعات المعلومات في حالة النفي .

9 ــ يقوم لاعبين I و II بلعب اللعبة التالية : يقوم اللاعب I بسحب واحدة من 3 أوراق اللعب هي الأس ، الملك أو الملكة (والذي سنرمز لها بـ Q و K و A على الترتيب) بطريقة عشوائية وإعطائها للاعب II الذي يقوم بالنظر إليها . فإذا كانت الأس (A) فإن على II أن يعلن عنها وإذا كانت الملك (K) فإن II يمكن أن يقول أس (A) أو ملك (K) ، أما إذا كانت الملكة فإن II يمكن أن يقول أنها أس (A) أو ملكة (Q) . فإذا قال II عن الورقة أنها الأس فإن I يمكن أن يصدقه ويدفع له عندئذٍ 1$ أو أن يطلب رؤية الورقة وعندئذٍ إذا كانت الورقة هي الأس فإن I يدفع لـ II مبلغ 2$ ، أما إذا كانت غير ذلك فإن II يدفع لـ I مبلغ 2$. وإذا قال II أن الورقة المسحوبة هي الملك فإنه لا يترتب على ذلك أي خسارة للاعبين ، أما إذا قال II عن الورقة المسحوبة بأنها الملكة فعندئذٍ سيدفع II لـ I مبلغ 1$. والمطلوب :

1 ــ رسم شجرة المباراة .

2 ــ تحديد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ــ إيجاد مصفوفة المباراة .

المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين
Two-Zero-Sun Games

(2 ــ 1) مقدمـــــــة

إن أول تطوير للرياضيات المتعلقة بنظرية المباريات قد تم على المباريات التي أسميناها المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين . ومع أن هذا النوع من المباريات لا ينطبق إلا على القليل من الحالات التي تنشأ في الواقع العملي إلا أن طـــرق الحـــل المتعلقة بها تلعب دوراً أساسياً في حل المباريات ذات المجموع غير الصفري .

تتميز المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين بالخصائص التالية :

1 ــ لدينا لاعبين فقط يمكن لكل منهما اختيار واحدة من عدد محدد (منتـــه) مـــن الاستراتيجيات .

2 ــ إن اصطلاح " المجموع الصفري " يعني أن أي ربح (أو عائد) يحققـــه أحـــد اللاعبين لـــدى لعبه استراتيجية معينة يســـاوي بالضبط خسارة (أو معكوس) ما يحققه اللاعب الآخر لدى لعبه الاستراتيجية المقابلة أو أن مجمـــوع عوائـــد اللاعبين لدى لعبهما أي استراتيجيتين متقابلتين يكون صفراً أو مقداراً ثابتاً .

3 ــ لدى كل من اللاعبين معرفة كاملة عن كـــل الاســـتراتيجيات المتـــوافرة لكـــلا اللاعبين كما أن العوائد المقابلة لكل استراتيجية تنافسية معروفة لكلا اللاعبين .

4 ــ يُنظر إلى كل من اللاعبين على أنه شخصي الاهتمام (Rational) بمعنى أنـــه ينظر إلى جعل عوائده (أو عوائده المتوقعة إذا وجدت عناصر احتماليـــة فـــي اللعبة) أكبر ما يمكن .

5 ــ لا يسمح لأي من اللاعبين أن يقوم بعمليـــة منـــاورة أو احتيـــال أو مســـاومة Bargaining ويتم ضمان ذلك باشتراط أن الاستراتيجيات يتم اختيارهـــا بـــآن واحد .

6 ــ يتم التعبير عن عوائد اللاعبين بكتابة عوائد اللاعب الأول على أن تفهم عوائد اللاعب الثاني ضمناً والأمثلة (1 ــ 1) ومن (1 ــ 3) إلى (1 ــ 6) هي أمثلة على مباراة ذات مجموع صفري لشخصين .

كما سنرى أدناه فإن معرفة مصفوفة المباراة ستكون كافية لإيجاد كل من الحل الأمثل أي الاستراتيجيات المثلى للاعبين وقيمة المباراة (وهو ما نطلق عليه حل المباراة) ولذلك سنكتفي في الأمثلة القادمة بذلك .

(2 ــ 2) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين

لنفرض أن لدينا لاعبين A و B يلعبان مباراة ذات مجموع صفري وأن اللاعب A يمتلك m استراتيجية هي $A_1 , A_2 , \dots , A_m$ وأن اللاعب B يمتلك n استراتيجية هي $B_1 , B_2 , \dots , B_n$ ، ولنرمز e_{ij} للقيمة المتوقعة للعائد الذي يحصل عليه A لدى لعب الاستراتيجية (A_i , B_j) (نذكر بأن B يحصل عندئذٍ على e_{ij} –) عندئذٍ تكون مصفوفة المباراة ولتكن G هي مصفوفة $m \times n$ ومعطاة كما يلي :

$$G = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i1} \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} B_1 & & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} e_{11} & & e_{12} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & & e_{22} & \dots & e_{2j} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{i1} & & e_{i2} & \dots & e_{ij} & \dots & e_{in} \\ e_{m1} & & e_{m2} & \dots & e_{mj} & \dots & e_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

بعد معرفة مصفوفة المباراة G سنكون قادرين وبشكل عام على حل المباراة . وتستند فكرة حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين على التحليل التالي :

ينظر إلى المباريات ذات المجموع الصفري بأنها غير تعاونية (Noncooperative) بمعنى أن كلاً من الخصمين يسعى إلى جعل عوائده أكبر ما يمكن وهذا يعني ضمناً جعل عوائد الخصم أقل ما يمكن . فبالنسبة للاعب الأول (A مثلاً) فإنه سيحاول النظر إلى أقل عائد يمكن أن يحصل عليه مقابل كل من استراتيجياته وسيقوم بعدها باختيار الاستراتيجية التي تقابل أكبر هذه النتائج وهو يضمن بذلك أنه لن يحصل على عائد أقل من ذلك مهما كانت الاستراتيجيات التي يتبعها خصمه (اللاعب B) . وبلغة أخرى إذا افترضنا أن e_{ij} هو العائد المتوقع لدى استخدام الاستراتيجية A_i للاعب A

ضد الاستراتيجية B_j للاعب B فإن اختيار اللاعب A للاستراتيجية التي تقابل القيمة υ_l المعطاة بـــ :

$$\upsilon_l = \max_i (\min_j e_{ij}) \qquad (2.1)$$

تعني أن اللاعب A لن يحصل على نتيجة أقل من υ_l المحددة بالعلاقـــة (1) مهمـــا كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب B . ولذا فإن القيمة υ_l هذه تسمى القيمة الدنيا (lower value) للمباراة .

بالمقابل فإن اللاعب B (خصم A) سيتبع نفس سياسة A فـــإذا تـــذكرنا أن عناصر مصفوفة العوائد هي تعبير عن عوائد اللاعب A وأن عوائد اللاعب B هـــي بالضـــبط عوائد اللاعب A مضروبة بـــ 1- فإن ذلك يعني أن اللاعـــب B ســـيقوم بالآتي :

من أجل كل من استراتيجياته سيقوم اللاعب B باختيار أكبر العوائد التي حصل عليهـــا A (وهذا يقابل أقل العوائد التي حصل عليها B) ثم يقوم بعدها باختيار الاستراتيجية التي تقابل أقل هذه النتائج (أكبرها بالنسبة لـــ B) . وبعبارة أخرى فإن اللاعـــب B سيختار الاستراتيجية التي تقابل القيمة υ_u المعطاة بـــ :

$$\upsilon_u = \min_j (\max_i e_{ij}) \qquad (2.2)$$

وباختيار اللاعب B للاستراتيجية المحددة بالعلاقـــة (2) فإنـــه سيضـــمن أن اللاعب A لن يحصل على أكثر من القيمة υ_u ولذا تسمى هذه القيمـــة بالقيمـــة العليـــا (upper value) للمباراة وبالطبع سيكون لدينا بشكل عام :

$$\upsilon_l \le \upsilon_u \qquad (2.3)$$

فمثلاً لو أخذنا المباراة :

$$G = \begin{matrix} \\ \max \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \min \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

نجد أن :

$$\upsilon_l = -\frac{1}{2}$$

$$\upsilon_u = 0$$

وبالتالي فإن : $\upsilon_l \neq \upsilon_u \qquad (\upsilon_l < \upsilon_u)$

وتعني هذه النتيجة أن اقل قيمة يمكن أن يحصل عليها اللاعب الأول هـي $\upsilon_l = -\frac{1}{2}$ ولكن اللاعب الثاني سيمنعه من الحصول على أكثر من 0 $(\upsilon_u = 0)$ 0 .

تعريف (2 ــ 1)

في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين نسمي الاستراتيجية التي يكون من أجلها :

$$\upsilon_l = \upsilon_u = \upsilon \qquad (4.2)$$

بالاستراتيجية المثلى (أو الحل الأمثل) ونسمي القيمة υ بقيمة المباراة . واستناداً إلى المناقشة أعلاه فإن υ هي القيمة التي يحصل عليها A . أما B فيحصل على $-\upsilon$.

فإذا تحققت العلاقة (4.2) من أجل استراتيجية بحتـه (خالصـة) قلنـا إن للمباراة نقطة سرجية (Saddle point) أو نقطة توازن . و إلا فـإن الحـل الأمثـل سيكون إحدى الاستراتيجيات المختلطة التي أشرنا إليها أعلاه . ولمزيد مـن الإيضـاح نسوق الأمثلة التالية :

مثال (2 ــ 1)

في أي المباريتين التاليتين توجد نقطة سرجية :

$$G_1 = \begin{array}{c|ccccc|c} & & & & & & \text{Min} \\ & -2 & 1 & 1 & 3 & -5 & -3 \\ & 4 & 2 & -5 & -6 & 2 & -6 \\ & 5 & 3 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ & 7 & -3 & 5 & -1 & 6 & -3 \\ \hline \text{Max} & 7 & 3 & 5 & 6 & 6 & \end{array}$$

$$G_2 = \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \text{min} \\ & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & 5 & 6 & 8 & 5 \\ & 6 & 4 & 9 & 4 \\ \hline \text{max} & 6 & 6 & 9 & \end{array}$$

وما هو الحل الأمثل عندئذٍ ؟

حـــل المباراة G_1 :

نلاحظ أن :

$$\upsilon_l = \text{Max (Min } e_{ij}) = \text{Max } \{ -5, -6, 3, -3\} = 3$$
$$\upsilon_u = \text{Min (Max } e_{ij}) = \text{Min } \{7, 3, 5, 6, 6\} = 3$$

نلاحظ أن : $\upsilon_l = \upsilon_u = 3$ ويقابل ذلك الاستراتيجية (A_3, B_2) لذا فـــإن الاســـتراتجية (A_3, B_2) أو النقطة 3 المقابلة لهذه الاستراتيجية هي نقطة سرجية والحل الأمثل هو :

الاستراتيجية A_3 هي المثلى للاعب A

الاستراتيجية B_2 هي المثلى للاعب B

وقيمة المباراة هي $\upsilon = 3$ والتي تعني أن اللاعـــب A لا يحصـــل على أقل أو أكثر من 3 . أما اللاعب B فيحصل على 3- .

المباراة G_2 :

نلاحظ أن :

$$\upsilon_l = \text{Max } \{ 2, 5, 4 \} = 5$$
$$\upsilon_u = \text{Min } \{ 6, 6, 9 \} = 6$$

إذاً $\upsilon_l \neq \upsilon_u$ ولا توجد نقطة سرجية لهذه المباراة . وسنتعرف على حل مثـــل هـــذه المباراة (وهو استراتيجية مختلطة) فيما بعد .

(2 ــ 3) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من الشكل 2 x 2

بالعودة إلى المباراة :

$$G = \begin{matrix} \\ \\ \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ & \\ y & 1-y \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix}$$

فقد وجدنا أن $\upsilon_u = 0 \neq \upsilon_l = -\frac{1}{2}$ ويعني ذلك أن اللاعب الأول يمكن أن يحصل على قيمة بين $0, -\frac{1}{2}$. والسؤال كيف نحل مثل هذه المباراة ؟ وللإجابة نذكّر أولاً أن الحل لمثل هذه المباراة (ذات المجموع الصفري) هو استراتيجية مختلطة من الاستراتيجيتين المتاحتين له والتي يمكن أن توفر له عائداً متوقعاً أفضل من $-\frac{1}{2}$ ولكنه لا يتجاوز 0 ولذلك بتكرار كلاً من الاستراتيجيتين المتاحتين بنسبة معينة من المرات أي أن يلعب كلاً منهما باحتمال مناسب يحسّن من عائده المتوقع . وتعني كلمة " العائد المتوقع " أننا نفترض ضمناً بأن المباراة تتكرر عدداً كبيراً من المرات وذلك حسبما يقتضيه مفهوم التوقع في نظرية الاحتمالات . فلو فرضنا أن اللاعب A يلعب الاستراتيجية المختلطة (x_1 , x_2) وأن اللاعب B يلعب الاستراتيجية المختلطة (y_1 , y_2) [نذكر بأن $x_1 + x_2 = 1$ و $y_1 + y_2 = 1$] كان لدينا ما يلي :

للتسهيل نفرض :

$$x_1 = x, y_1 = y \quad \text{عندئذٍ} \quad x_2 = 1 - x \quad \text{و} \quad y_2 = 1 - y$$

عندئذٍ فإن اللاعب A يرغب بالحصول على نفس العوائد مهما كانت الاستراتيجية التي يختارها اللاعب B ونفس الشيء بالنسبة للاعب B . الآن لدينا ما يلي :

العائد الذي يحصل عليها اللاعب A إذا استخدم اللاعب B الاستراتيجية B_1 هو :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = 0.x + (-\frac{1}{2})(1-x)$$

والعائد الذي يحصل عليه A إذا استخدم B الاستراتيجية B_2 هو :

$$-x = (-1)x + 0.(1-x)$$

وبمساواة هذين العائدين نحصل على المعادلة التالية بـ x وهي :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = -x \qquad (5.2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} (\Rightarrow 1 - x = \frac{2}{3})$$

وبالتالي فإن على A لعب الاستراتيجية المختلطة $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ والتي تعني أنه لو تكررت اللعبة عدداً من المرات فعلى A أن يلعب الاستراتيجية A_1 ثلث المرات ويلعب الاستراتيجية A_2 ثلثي المرات . وبالمثل فإن العائد الذي يحصل عليه اللاعب B إذا استخدمت A_1 هو :

$$0 \cdot y + (-1)(1 - y) = -1 + y$$

والعائد الذي يحصل عليه اللاعب B إذا استخدمت A_2 هو :

$$(-\frac{1}{2})y + 0 \cdot (1-y) = -\frac{1}{2}\ y$$

وبمساواة هذين العائدين نحصل على المعادلة :

$$-1+y=-\frac{1}{2}\ y \qquad (6)$$

وحلها يعطي $(1-y=\frac{1}{3})\ y=\frac{2}{3}$. إذاً على اللاعب B أن يلعب الاستراتيجية المختلطة $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. ويمكنا الآن حساب قيمة المباراة إما بتعويض x بقيمتها في العلاقة (5) أو y بقيمتها في العلاقة (6) وفي الحالتين نحصل على قيمة المباراة :

$\upsilon=-\frac{1}{3}$ وهي القيمة التي يحصل عليها A أما B فيحصل على $\frac{1}{3}$.

ملاحظة (2 ــ 1)

هناك طريقة بسيطة لحل مسائل المباريات **2 x 2** ذات المجموع الصفري وهي كما في المثال التالي :

مثال (2 ــ 2) :

لنأخذ المباراة التالية :

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

نقوم أولاً بالتأكد أن المباراة لا تملك نقطة سرجية ثم نقوم بعدها بطرح الرقم الصغير في كل سطر (في كل عمود) من الرقم الكبير ونضع نتائج الطرح مقابل السطر (العمود) الآخر ثم نقسم كل ناتج مقابل كل سطر (كل عمود) على مجموع الناتجين في السطرين أي على 3 + 2 = 5 (في العمودين أي على 4 + 1 = 5) . وجميع هذه العمليات موضحة أدناه :

$$G = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5-3=2 \\ 4-1=3 \end{matrix} \\ 4-3=1 \quad 5-1=4 \end{matrix}$$

$$G = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2/5 \\ 3/5 \end{matrix} \\ 1/5 \quad 4/5 \end{matrix}$$

عندئذٍ تكون الاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب A هي $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ لـ (A_1 , A_2) والاستراتيجية المختلطة المثلى للاعب B هي $(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$ لـ (B_1 , B_2) . أما قيمة المباراة فنحصل عليها بإحدى الطريقتين :

الطريقة الأولى : أن نضرب الاحتمالات $(\frac{2}{5},\frac{3}{5})$ العائدة للاعب A بالعوائد المقابلة في أي عمود . أي :

$$\upsilon = \frac{2}{5}\times 1 + \frac{3}{5}\times 5 = \frac{17}{5} \quad \text{أو} \quad \upsilon = \frac{2}{5}\times 4 + \frac{3}{5}\times 3 = \frac{17}{5}$$

الطريقة الثانية : أن نضرب الاحتمالات $(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$ العائدة للاعب B بالعوائد المقابلة في أي سطر . أي :

$$\upsilon = \frac{1}{5}\times 1 + \frac{4}{5}\times 4 = \frac{17}{5} \quad \text{أو} \quad \upsilon = \frac{1}{5}\times 5 + \frac{4}{5}\times 3 = \frac{17}{5}$$

إذاً A يحصل على $\frac{17}{5}$ فهو اللاعب الرابح بينما يحصل B على $-\frac{17}{5}$ فهو اللاعب الخاسر . وهذا أمر طبيعي بملاحظة أن جميع عوائد A في المصفوفة G هي موجبة بينما عوائد B هي سالبة .

وكما أشرنا في الفصل الأول فإن استخدام فكرة الاستراتيجيات المختلطة (من الخالصة) قد أثرى نظرية المباريات فقد أثبت فون نيومان عام 1937 النظرية التالية :

نظرية (2 ــ 1)

في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين إذا كان كل من اللاعبين يملك عدداً منتهياً من الاستراتيجيات الخالصة فعندئذٍ يوجد على الأقل حل للمباراة يتمثل في استراتيجية خالصة أو مختلطة .

(2 ــ 4) الهيمنة في الاستراتيجيات ذات المجموع الصفري لشخصين

نصادف أحياناً مباريات تكون فيها عوائد استراتيجية ما لأحد اللاعبين أفضل من (أو تعادل) مقابلاتها لاستراتيجية أو أكثر عندئذٍ نقول إن الاستراتيجية الأولى تهيمن (dominate) على الاستراتيجيات الأخيرة ويمكننا عندئذٍ حذف هذه الأخيرة من مصفوفة المباراة (وبالطبع فإنه في حال وجود استراتيجيات مكرره فإنه يُكتفى ببقاء أحدها) وفي حال كانت العوائد لاستراتيجية أفضل تماماً من مقابلاتها لاستراتيجية أخرى فإننا نقول إن الأولى تهيمن هيمنة مطلقة على الثانية . لنوضح ذلك بالأمثلة التالية :

مثال (2 ــ 3)

اختصر كلاً من المباريات (ذات المجموع الصفري لشخصين) التالية إلى أقصى ما يمكن :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ -14 & 4 & -10 & -8 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \\ 12 & -12 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

حـــــل

G_1 : نلاحظ أن عوائد الاستراتيجية A_2 أفضل من مقابلاتها للاستراتيجية A_1 لذا فإن G_1 تختصر كمرحلة أولى إلى [5 4] فـإذا تـذكرنا أن [5 4] تعنـي أن اللاعب B يحصل على 4- في الاستراتيجية B_1 وعلى 5- في الاسـتراتيجية B_2 فإنه يمكن حذف الاستراتيجية B_2 واختصار G_1 إلى [4] فالحـل الأمثـل للمباراة هو (A_2 , B_1) وقيمته $\upsilon = 4$ (لاحظ أن 4 هي نقطة سرجية للمباراة G_1 حتى ولو لم نقم باختصارها) .

G_2 : لا توجد هيمنة بين استراتيجيات اللاعب A . وبالنسبة للاعب B فإن B_2 تهيمن على B_3 ويقود ذلك إلى المباراة :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

وهو أقل اختصار ممكن للمباراة G_2 . لاحظ أنه لا توجد لهذه المبـاراة نقطـة سرجية وسنتعرف بعد قليل على كيفية حل مثل هذا النوع من المباريات .

G_3 : نلاحظ أن A_1 تهيمن على A_2 و A_4 فنحصل على المباراة :

$$\begin{bmatrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

وفيها B_4 تهيمن على B_1 و B_2 فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

وليس لهذه الأخيرة نقطة سرجية لكنها من النوع 2 x 2 لذا يمكن حلها بالطريقة البسيطة المشار إليها في الملاحظة (2 ــ 1) أعلاه حيث نجد الحــل التالي :

$(\frac{18}{23}, \frac{5}{23})$ لــ (A_1 , A_3) و $(\frac{6}{23}, \frac{17}{23})$ لــ (B_3 , B_4) و $\upsilon = \frac{168}{23}$

(تحقق من ذلك) .

وبشكل عام ولاختصار مباراة فإننا نقوم أولاً بفحص استراتيجيات أحد اللاعبين وحذف تلك التي تخضع للهيمنة ومن ثم نقوم بفحص استراتيجيات اللاعب الثاني وحذف تلك التي تخضع للهيمنة حتى نصل إلى أقصى اختصار ممكن للمباراة المعنية . وفــي هذا الصدد لدينا النظرية التالية :

نظرية (2 ــ 2)

إذا أمكن اختصار المباراة G إلى المباراة 'G فإن أي حل لــ 'G هو حل لــ G .

إن عكس نظرية (2 ــ 2) ليس صحيحاً بشكل عام فكل حل لــ G ليس بالضــرورة حل لــ 'G . وهذا يعني أننا قد نخسر بعض الحلول المثلى الممكنة للمباراة الأصلية G عند استخدامنا للمباراة المختصرة 'G . فمثلاً لو أخذنا المباراة $G = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإنه يمكن اختصارها إلى [2 2] ثم إلى [2] = 'G والتي تقود إلى الحل الأمثل (A_1 , B_1) وقيمته $\upsilon = 2$ للمباراة المختصرة والأصلية معــاً . ويمكننــا فــي الحقيقــة أن نتأكــد مــن الاستراتيجيات المختلطة (1,0) و $(\alpha, 1-\alpha)$ حيث $0 \leq \alpha \leq 1$ هي جميعاً حلول مثلى لــ G وأن قيمها جميعاً هي $\upsilon = 2$ أي أننا خسرنا بعض الحلول للمبــاراة الأصــلية . ومع ذلك إذا كانت الهيمنة مطلقة فإنه لن تكون هناك خسارة في الحلــول (لاحــظ أن الهيمنة في [2 2] ليست مطلقة) كما في المثال التالي :

مثال (2 ــ 4)

شركتان متنافستان A و B للسيطرة على تسويق الخدمات الهاتفيــة فــي أحــد البلدان العوائد تقدر بملايين الدولارات . المطلوب إيجاد الحل الأمثل لكلا الشركتين .

$$
\begin{array}{c} \\ A \end{array}
\begin{array}{c}
\qquad\quad B \\
\begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc} -600 & 200 & 400 \\ 400 & -800 & 1000 \\ -800 & -1000 & 1400 \end{array}\right]
\end{array}
$$

الحـــــل :

نلاحظ أولاً عدم وجود نقطة سرجية وأن B_2 تهيمن مطلقاً على B_3 ولذا فـإن المباراة تختصر إلى :

$$\begin{bmatrix} -600 & 200 \\ 400 & -800 \\ -800 & -1000 \end{bmatrix}$$

وفيها A_1 تهيمن مطلقاً على A_3 ولذا فإن الأخيرة تختصر إلى المبـاراة 2 x 2 التالية :

$$\begin{bmatrix} -600 & 200 \\ 400 & -800 \end{bmatrix}$$

وحـلها هـو $(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$ لـ (A_1 , A_2) و $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ لـ (B_1 , B_2) وقيمـتها υ = -200 أي أن الشركة A ستخسر 200 مليون دولار بينما تربح الشركة B مقـدار 200 مليون دولار . والحل الذي حصلنا عليه هو حل وحيـد للمبـاراة الأصـلية لأن الهيمنة بين الاستراتيجيات مطلقة .

ملاحظة (2 ــ 2)

1 ــ في حال تعدد الحلول المثلى فإنها جميعاً تعطي نفس القيمة والتي نسميها قيمة المباراة وتنفيذ أحدها يكون كاف للاعبين إلا أنه قد يُفقد اللاعبين بعض المرونة التي قد يحتاجونها .

ب ــ إن مفهوم الهيمنة والهيمنة المطلقة الذي ذكرناه أعلاه بين الاستراتيجيات يتعلق فقط بالاستراتيجيات الخالصة (البحته) . إن استخدام مفهوم مماثل للاستراتيجيات المختلطة هو من الأمور الصعبة عملياً مع أنه صحيح من الناحية النظرية ولذا فلن نتطرق له في هذا الكتاب .

جـ ــ إن الطريقة المبسطة لحل المباريات 2 × 2 والواردة في الملاحظة (2ــ1) تنطبق فقط على المباريات 2 × 2 غير القابلة للاختصار .

(2 ــ 5) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من النوع 2 x m (أو n x 2) حيث $m \geq 3$ (أو $n \geq 3$) :

إذا كان لدينا مباراة ذات مجموع صفري لشخصين من الشكل n × m (وليست من النوع 2 x 2) وأمكن اختصارها إلى أحد الشكلين 2 x m حيث $m \geq 3$ أو n x 2 حيث $n \geq 3$ وإذا لم يكن للمباراة الناتجة (بعد الاختصار) نقطة سرجية فإنه يمكن حلها بإحدى الطرق التالية :

طريقة التجزئة :

إذا كانت المباراة الناتجة من الشكل 2 x m ($m \geq 3$) فهذا يعني أن للاعب B أكثر من استراتيجيتين وعندها نقوم بإيجاد جميع المباريات الجزئية من الشكل 2 x 2 للاعب B (وعددها $\binom{m}{2}$)[1] ثم نقوم بحلها جميعاً ومن ثم اختيار المباراة التي تملك أقل قيمة (وذلك لأن جميع هذه المباريات الجزئية تعود إلى اللاعب B ولأن العوائد فيها تعبر عن خسائر لهذا اللاعب) ويكون حل هذه المباراة هو حل للمباراة الأصلية . أما إذا كانت المباراة الناتجة من الشكل n x 2 ($n \geq 3$) فعندئذٍ نقوم بإيجاد جميع المباريات الجزئية من الشكل 2 x 2 للاعب A (وعددها $\binom{n}{2}$) ونحلها جميعاً ثم

نختار تلك التي تملك أكبر قيمة (لأن جميع هذه المباريات الجزئية تعـود للاعـب A ولأن العوائد فيها تعبر عن أربـاح لهذا اللاعب) ويكون حل هذه المباراة هـو حـل للمباراة الأصلية . ويعود السبب في ذلك إلى النظرية (2ـ2) أعلاه .

وسنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (2 ـ 5)

أوجد الحل الأمثل لكل من المباريات التالية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 7 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

حـــــل

نلاحظ أولاً أنه لا توجد لأي من الماريتين G_1 ، G_2 نقطة سرجية وأن المباراة G_1 يمكن اختصارها إلى :

$$G_3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(وذلك لأن B_6 تهيمن على B_5 و B_1 ولأن B_2 تهيمن على B_3) .

كذلك فإن G_2 يمكن اختصارها إلى :

$$G_4 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(وذلك لأن A_1 تهيمن على A_4 و A_5) .

الآن نلاحظ أن G_3 هي من النوع 2 x m (m = 3) ويمكن تجزئتها إلـــى $3 = \binom{3}{2}$ مباريات جزئية هي :

$$a = \begin{bmatrix} ④ & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3/4 \\ 1/4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3/4 & 1/4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$c = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4/7 \\ 3/7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3/7 & 4/7 \end{matrix} \end{matrix}$$

جميعها تعود إلى اللاعب B وللحل نلاحظ :

(a) تملك نقطة سرجية هي (4) فحلها هو (A_1 , B_1) وقيمته $\upsilon_a = 4$.

(b) لا تملك نقطـــة ســـرجية وحـــلها هـــو $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ لـــ (A_1 , A_2) و $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ لـــ (B_2 , B_6) وقيمته $\upsilon_b = \frac{15}{4}$ (تحقق من ذلك) .

(c) لا تملك نقطـــة ســـرجية وحـــلها هـــو $(\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$ لـــ (A_1 , A_2) و $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ لـــ (B_4 , B_6) وقيمته $\upsilon_c = \frac{30}{7}$.

وبملاحظة أن (b) تمتلك أقل قيمة فإن الحل الأمثل للمباراة الأصلية هو نفسه الحل الأمثل للمباراة الجزئية (b) .

حـــــل المباراة G_2

نذكر أولاً أن المباراة G_2 أمكن اختصارها إلى المباراة G_4 :

وهي من النوع $2 \times n$ ($n = 3$) ويمكـــن تجزئتها إلى $\binom{3}{2} = 3$ مباريات جزئية وهي :

$$d = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4/5 \\ 1/5 \end{matrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \\ 6/11 & 5/11 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4/11 \\ 7/11 \end{matrix}$$

جميعها تعود إلى اللاعب A . وحلول هذه المباريات هي كما يلي :

(d) لا تملك نقطـــة ســـرجية وحـــلها هـــو $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ لـــ (A_2, A_3) و $(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ لـــ (B_1, B_2) وقيمته $\upsilon_d = 7/5$.

(e) تملك نقطـــة ســـرجية هي (1) وحـــلها هـــو (A_2, B_2) وقيمته $\upsilon_e = 1$.

(f) لا تملك نقطـــة ســـــرجية وحـــــلها هـــــو $(\frac{4}{11}, \frac{7}{11})$ لـــــ (A_1, A_3) و $(\frac{6}{11}, \frac{5}{11})$ لـــ (B_1, B_2) وقيمته $\upsilon_f = \frac{9}{11}$.

وبملاحظة أن (d) تملك أكبر قيمة فإن الحل الأمثل للمباراة الأصلية هو نفســـه الحل الأمثل للمباراة الجزئية (d) .

طريقة الرسم البياني

بعد اختصار المباراة نميز حالتين :

أ ــ المباريات من الشكل 2 x m ($m \geq 3$) :

نرسم محورين عموديين مقابلين للاستراتيجيتين العائدتين لـــ A ونضع على كل منهما عوائد الاستراتيجية المقابلة بحيث تكون الوحدات متساوية ومتقابلة تماماً نقوم بعدها بتوصيل العوائد المتقابلة لهاتين الاستراجيتين ثم نعلم القسم السفلي من الخطوط الناتجة ثم نختار أعلى نقطة من القسم المعلم ثم نحدد الخطين (وبالتالي الاستراتيجيتين) المتقاطعين في هذه النقطة ونحل المباراة 2 x 2 الجزئية المقابلة فيكون حلها هو حل للمباراة الأصلية .

ب ــ المباراة من الشكل n x 2 ($n \geq 3$) :

نرسم محور عمودين مقابلين لاستراتيجيات اللاعب B ونضع على كل منهما عوائد الاستراتيجية المقابلة بحيث تكون الوحدات متساوية ومتقابلة ثم نصل بين العوائد المتقابلة لهاتين الاستراتيجيتين بخطوط ثم نعلّم القسم العلوي ثم نختار أدنى نقطة من القسم المعلم ثم نحدد الخطين (وبالتالي الاستراتيجيتين) المتقاطعين في تلك النقطة وتحل المباراة 2 x 2 المقابلة فيكون حلها هو حل المباراة الأصلية .

وسنوضح الطريقة البيانية في الحالتين أ ــ و ب ــ من خلال إعادة حل المثال (2 ــ 5) بالطريقة البيانية .

مثال (2 ــ 6)

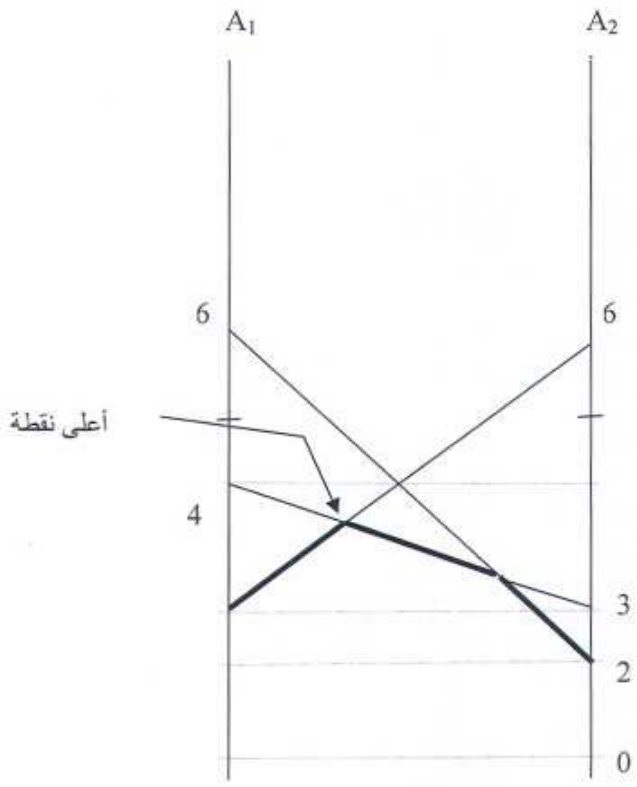
أوجد الحل الأمثل للمباريات G_1 ، G_2 في مثال (2 ــ 5) بالطريقة البيانية .

بالعودة إلى مثال (2 ــ 5) فقد وجدنا أن المباراة G_1 أمكن اختصارها إلى المباراة :

$$G_3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

ولو قمنا بالعمل الموصوف في (أ) أعلاه لحصلنا على الشكل (2 ــ 1) وأعلى نقطة في القسم السفلي المعلم تحدد لنا الاستراتيجية 2 x 2 الجزئية التالية :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$



شكل (2 ــ 1)

وهي المباراة الجزئية (b) والتي سبق وأوجدنا حلها أعلاه . وحلها يمثل الحل الأمثـل للمباراة الأصلية .

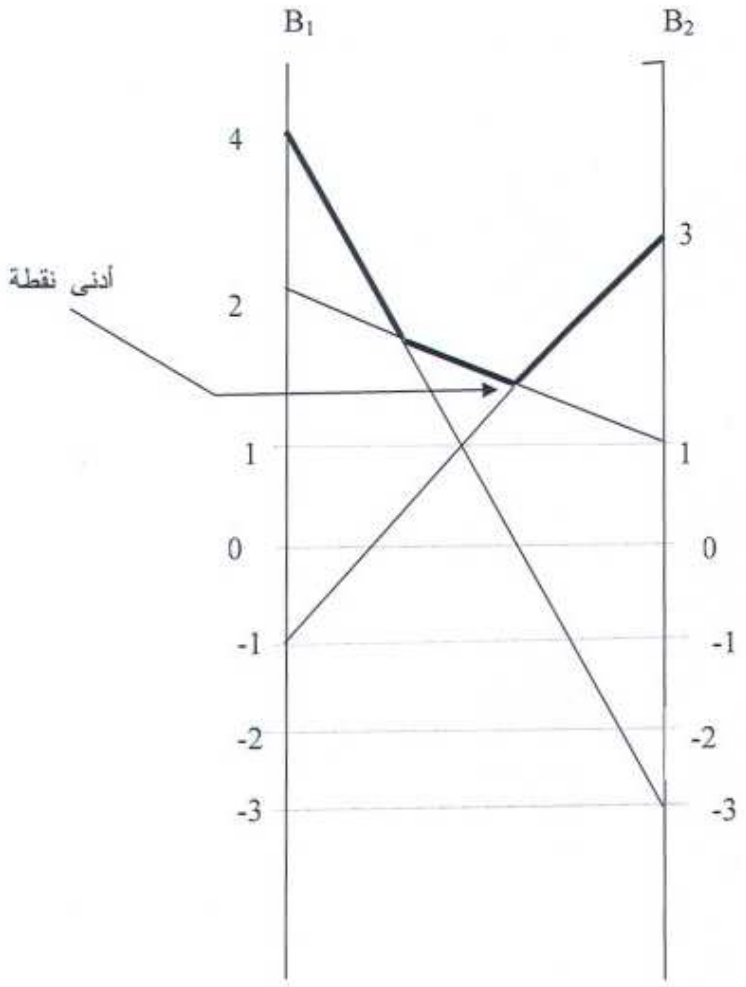
كذلك فقد وجدنا أن المباراة G_2 قد أمكن اختصارها إلى :

$$G_4 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ولو قمنا بالعمل الموصوف في (ب) أعــلاه لحصلنا على الشكل (2 ــ 2) وأدنـــى نقطة في القسم المعلم تحدد لنا المباراة 2 x 2 الجزئية التالية :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

وهي المباراة الجزئية (d) والتي سبق وأوجدنا حلها . لاحظ أن نتائج المثال (2 ــ 5) تتطابق مع نتائج المثال (2 ــ 6) .



شكل (2 ــ 2)

ملاحظة (2 ــ 3)

أشرنا في الحالة (أ) إلى أننا نعلم القسم السفلي من الخطوط ثم نختار أعلى نقطة من القسم المعلم وهذا يتوافق مع كون $\upsilon_l = \text{Max (Min } e_{ij})$ التي تعطي القيمة التي يحصل عليها A حيث أن المحورين A_1 و A_2 يعودان لـ A . وبالمثل فإن اختيار أعلى قسم من الخطوط ثم اختيار أدنى نقطة فيه في الحالة (ب) يتوافق مع كون $\upsilon_u = \text{Min (Max } e_{ij})$ التي تعطي القيمة التي يحصل عليها B حيث أن المحورين B_1 و B_2 يعودان لـ B . وفي الحالتين فإن حل المباراة يعني أن $\upsilon_l = \upsilon_u$.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن . ماذا لو كانت المباراة (بعد اختصارها) من الشكل n x m حيث $m \geq 3$ و $n \geq 3$ ولم يكن لها نقطة سرجية ؟ هذا ما سنجيب عليه في الفقرة التالية .

(2 ــ 6) حل المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين من الشكل n x m حيث $m \geq 3$ و $n \geq 3$ بطريقة البرمجة الخطية

إذا افترضنا أنه بعد إزالة الاستراتيجيات بسبب الهيمنة فإن المباراة المختصرة آلت إلى الشكل n x m حيث $n \geq 3$ و $m \geq 3$ وأن المباراة المختصرة لا تملك نقطة سرجية عندئذٍ تكون الطريقة المناسبة لحل هذه المباراة هي طريقة البرمجة الخطية (Linear programming) . وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (2 ــ 7)

أوجد الحل الأمثل للمباراة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحـــل :

نلاحظ أن هذه المباراة هي من النوع 3 × 3 وأنها لا تملك نقطة سرجية كما أنها غير قابلة للاختصار أكثر من ذلك . نقوم في مثل هذه الحالة باستخدام تقنيات البرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل . فبما أنه لا توجد نقطة سرجية فإن الحل الأمثل لكلا اللاعبين هو استراتيجية مختلطة . فلو فرضنا أن الاستراتيجية المختلطة للاعب الأول هي $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ وللاعب الثاني هي $(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ حيث :

$\overline{x_i}$ = احتمال أن يلعب A الاستراتيجية A_i ($i = 1, 2, 3$) .

$\overline{y_j}$ = احتمال أن يلعب B الاستراتيجية B_j ($j = 1, 2, 3$) .

ولو رمزنا بالرمز υ لقيمة المباراة فإن υ هي ربح للاعب A وخسارة للاعب B (حسب اصطلاحاتنا أعلاه) .

ولذا فإن هدف اللاعب A أن يجعل υ أكبر ما يمكن (هدف اللاعب B هو أن يجعل υ أقل ما يمكن) مهما كانت الاستراتيجية التي يلعبها B (مهما كانت الاستراتيجية التي يلعبها اللاعب A) . وبذلك نحصل على ما يلي :

مسألة اللاعب A :

كبر الدالة υ (تكافيء صغر $\frac{1}{\upsilon}$)

وفقاً للقيود :

$$(PA)\begin{cases} \overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = 1 & \text{(قيد الاحتمالات)} \\ \overline{x_1} - 2\overline{x_2} + 2\overline{x_3} \geq \upsilon & \text{(ضمان الحصول على } \upsilon \text{ على الأقل إذا لعب B الاستراتيجية } B_1 \text{)} \\ 2\overline{x_1} + \overline{x_2} + 0.\overline{x_3} \geq \upsilon & \text{(ضمان الحصول على } \upsilon \text{ على الأقل إذا لعب B الاستراتيجية } B_2 \text{)} \\ -\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} \geq \upsilon & \text{(ضمان الحصول على } \upsilon \text{ على الأقل إذا لعب B الاستراتيجية } B_3 \text{)} \\ \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3} \geq 0 & \end{cases}$$

فإذا كانت $\upsilon > 0$ فإن المسألة الأخيرة (P_1A) تكافيء صغّر الدالة $X = \frac{1}{\upsilon}$

وفقاً للقيود :

$$\frac{\overline{x_1}}{\upsilon} + \frac{\overline{x_2}}{\upsilon} + \frac{\overline{x_3}}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}$$

$$\frac{\overline{x_1}}{\upsilon} - 2\frac{\overline{x_2}}{\upsilon} + 2\,\overline{x_3}/\upsilon \geq 1$$

$$2\overline{x_1}/\upsilon + \overline{x_2}/\upsilon + 0.\overline{x_3}/\upsilon \geq 1$$

$$-\overline{x_1}/\upsilon + \overline{x_2}/\upsilon + \overline{x_3}/\upsilon \geq 1$$

$$\overline{x_1}/\upsilon\,,\ \overline{x_2}/\upsilon\,,\ \overline{x_3}/\upsilon \geq 0$$

فإذا افترضنا أن $x_i = \overline{x_i}/\upsilon$ فإن المسألة السابقة تصبح :

صغّر الدالة X وفقاً للقيود

$$X - x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$
$$2x_1 + x_2 + 0.x_3 \geq 1$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 0$$

مسألة اللاعب B :

صغّر الدالة υ (تكافيء كبّر $\frac{1}{\upsilon}$)

وفقاً للقيود :

$$\left.\begin{array}{l} \overline{y_1} + \overline{y_2} + \overline{y_3} = 1 \\ \overline{y_1} + 2\,\overline{y_2} - \overline{y_3} \leq \upsilon \\ -2\overline{y_1} + \overline{y_2} + \overline{y_3} \leq \upsilon \\ 2\,\overline{y_1} + 0.\overline{y_2} + \overline{y_3} \leq \upsilon \\ \overline{y_1}\,,\ \overline{y_2}\,,\ \overline{y_3} \geq 0 \end{array}\right\} \text{PB}$$

وإذا كانت $\upsilon > 0$ فإنه بعد القسمة على υ وافتراض أن $\overline{y_i} = \overline{y_i} / \upsilon$ نحصل وبطريقة مماثلة على المسألة التالية :

كبّر الدالة Y

وفقاً للقيود :

$$Y - y_1 - y_2 - y_3 = 0$$
$$y_1 + 2y_2 - y_3 \le 1$$
$$-2y_1 + y_2 + y_3 \le 1$$
$$2y_1 + 0.y_2 + y_3 \le 1$$
$$y_1 , y_2 , y_3 \ge 0$$

ملاحظة (2 ــ 4) :

كما نلاحظ في المثال الأخير فإن حل مسألة كل من اللاعبين A و B تكافيء حل برنامج خطي . وكما نلاحظ أيضاً فإنه قد تم التوصل إلى هذا البرنامج الخطي بعد القسمة على قيمة المباراة υ والذي اشترطنا له أن $\upsilon > 0$. لكن لا يوجد أي ضمان بأن تكون $\upsilon > 0$ ما لم تكن جميع العناصر في المصفوفة التي تمثل المباراة موجبة ويمكننا ضمان ذلك بإضافة عدد موجب k معطى بالعلاقة التالية :

k = القيمة المطلقة لأقل قيمة سالبة في مصفوفة المباراة + 1

وعندئذٍ تكون قيمة المباراة الأصلية ولتكن υ_0 معطاة بـ $\upsilon_0 = \frac{1}{Y} - k = \frac{1}{X} - k$. وكما في المثال أعلاه ولكتابة البرنامج الخطي لكل من اللاعبين A و B بشكله النهائي نستبدل المتغيرات $\overline{x_i}$ بالمتغيرات x_i حيث $x_i = \frac{\overline{x_i}}{\upsilon}$ للاعب A كما نستبدل المتغيرات $\overline{y_i}$ بالمتغيرات y_i حيث $y_i = \frac{\overline{y_i}}{\upsilon}$ حيث υ هي قيمة المباراة الجديدة بعد إضافة العدد k . وسنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (2 ــ 8)

المصفوفــة G_0 التالية هي مصفوفــة مــباراة ذات مجموع صفري للاعبين A و B . المطلوب كتابة البرنامج الخطي ثم إيجاد الحل الأمثل لكلا اللاعبين :

$$G = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad ، \quad G_0 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحــل . لضمان الحصول على قيمة موجبة للمباراة نضيف العدد $k = |4| + 1 = 5$ إلى جميع عناصر المصفوفة G_0 فنحصل على المصفوفة G . وكما نلاحظ لا توجــد هيمنة بين الاســتراتيجيات لأي من اللاعبين كما لا توجد نقطة سرجية . والبرنامـــج الخطــي للاعــبين A و B هما كما يلي :

البرنامج الخطي للاعب A بعد استخدام العلاقات $x_i = \bar{x}_i / \upsilon$ ، $y_i = \bar{y}_i / \upsilon$ هو :

$$X = x_1 + x_2 + x_3 \quad (= \frac{1}{\upsilon}) \qquad \text{صغرّ الدالة}$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{gathered} 8\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 \geq 1 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + 8\,x_3 \geq 1 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

مع العلم بأن $\upsilon = \frac{1}{X}$ و $\upsilon_0 = \frac{1}{X} - 5$

وأن احتمال أن يلعب A الاستراتيجية A_i هو $\bar{x}_i = \frac{x_i}{Z} = x_i . \upsilon$

والبرنامج الخطي للاعب B هو :

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 \quad (= \frac{1}{\upsilon}) \qquad \text{كبّر الدالة}$$

وفقاً للقيود

$$8\,y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 \le 1 \qquad (7)$$
$$2\,y_1 + 8\,y_2 + 4\,y_3 \le 1 \qquad (8)$$
$$y_1 + 2\,y_2 + 8\,y_3 \le 1 \qquad (9)$$
$$y_1 , y_2 , y_3 \ge \qquad (10)$$

مع العلم بأن : $\upsilon = \frac{1}{Y}\ (= \frac{1}{X})$ وأن $\upsilon_0 = \frac{1}{Y} - 5$ وأن $\overline{y_i} = \frac{y_i}{Y} = y_i . \upsilon$

وكما نلاحظ فإن مسألة اللاعب A هي المسألة الثنوية (Dual problem) لمسألة اللاعب B . وهذا الأمر صحيح دوماً من أجل أي مباراة ذات مجموع صفري لشخصين . وكما هو معلوم فإن جدول الحل الأمثل لأي من المسألتين يعطي بنفس الوقت الحل الأمثل للمسألة الأخرى . ولما كان حل مسألة اللاعب B لا يحتاج إلا إلى المرحلة الأولى من خوارزمية السمبلكس فإننا نقوم عادة باختيار حل مسألة اللاعب B ومنها نستنتج حلول مسألتي اللاعبين A و B . ولمزيد من التفاصيل حول طريقة الحل باستخدام خوارزمية السمبلكس يمكن للقارىء التعرف على هذه الخوارزمية وطريقة استخدامها في " الملحق " في نهاية هذا الكتاب .

نعود الآن إلى مسألة اللاعب B فإذا كتبنا دالة الهدف كأحد القيود أي : كبّر الدالة Y وفقاً لـ $Y - y_1 - y_2 - y_3 = 0$ والقيود (7) إلى (10) وإذا أضفنا المتغيرات الراكدة s_1 ، s_2 ، s_3 للقيود (7) و (8) و (9) فإننا نحصل على الصيغة القياسية التالية **لمسألة اللاعب B**

كبّر الدالة Y

$$Y - y_1 - y_2 - y_3 + 0.\,s_1 + 0.\,s_2 + 0.\,s_3 = 0$$
$$8\,y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 + s_1 + 0.\,s_2 + 0.\,s_3 = 1$$
$$2\,y_1 + 8\,y_2 + 4\,y_3 + 0.\,s_1 + s_2 + 0.\,s_3 = 1$$
$$y_1 + 2\,y_2 + 8\,y_3 + 0.\,s_1 + 0.\,s_2 + s_3 = 1$$
$$y_1 , y_2 , y_3 , s_1 , s_2 , s_3 \ge 0$$

وبإجراء الحسابات باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن جداول الحلول المتتابعة لهذا البرنامج هي كما في الجدول (2 ــ 1) التالي :

	$y_1 \downarrow$	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	الحل	النسبة
Y	-1	-1	-1	0	0	0	0	
s_1	⑧	4	2	1	0	0	1	1/8 →
s_2	2	8	4	0	1	1	1	1/2
s_3	1	2	8	0	0	1	1	1
Y	0	-0.5	-0.75	0.13	0	0	0.13	
y_1	1							
s_2	0							
s_3	0							
Y								
Y	0	0	0	0.1	0.06	0.07	0.23	
جدول الحل الأمثل y_1	1	0	0	0.14	-0.07	0	0.07	
y_2	0	1	0	-0.3	0.16	0.07	0.06	
y_3	0	0	1	-0.01	-0.03	0.14	0.10	

جدول (2 ــ 1) الحل الأمثل والحلول المتتابعة لمسألة اللاعب B لمثال (2 ــ 8)

ومن جدول الحل الأمثل [وهو الجدول الأخير من الجدول (2 ــ 1)] نجد ما يلي :

$$y_1 = 0.07 \text{ ، } y_2 = 0.06 \text{ ، } y_3 = 0.10 \text{ و } Y = 0.23 \text{ و } \upsilon = \frac{1}{Y} \approx 4.35$$

لاحظ أن : $y_1 + y_2 + y_3 \neq 1$ وأن $\upsilon > 0$

ولـــذلك فـــإن $\bar{y}_1 = \frac{y_1}{Y} = 0.304$ ، $\bar{y}_2 = 0.269$ ، $\bar{y}_3 = 0.435$ (لاحـــظ أن $(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 1)$ أما قيمة المباراة الأصلية فهي $\upsilon_0 = \frac{1}{Y} - 5 = -0.652$

لاحظ أن هذه القيمة هي قيمة سالبة وهذا يبرر إضافة $k = 5$ إلى جميع عناصر المصفوفة الأصلية . والحل أعلاه يعني أن على اللاعب B أن يلعب الاستراتيجية المختلطة (B_1 , B_2 , B_3) بالاحتمالات (0.435 , 0.269 , 0.304) ليحصل على أفضل قيمة وهي $\upsilon_b = +0.652$.

يمكننا الآن أن نحصل على الحل الأمثل لمسألة اللاعب A من جدول الحل الأمثل في الجدول (2 ــ 1) حيث تتمثل قيم المتغيرات x_1 ، x_2 ، x_3 بتلك القيم تحت المتغيرات غير الأساسية في جدول الحل الأمثل أي :

$$x_1 = 0.1 \quad \text{و} \quad x_2 = 0.06 \quad \text{و} \quad x_3 = 0.07 \quad \text{ولكن} \quad X = Y = 0.23$$

ومنه نجد $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{X} = 0.435$ ، $\bar{x}_2 = \frac{x_2}{X} = 0.269$ و $\bar{x}_3 = \frac{x_3}{X} = 0.304$

أي أن على اللاعب A أن يلعب الاستراتيجية المختلطة (A_1 , A_2 , A_3) بالاحتمالات (0.304 , 0.269 , 0.435) ليحصل بذلك على أفضل قيمة $\upsilon_0 = -0.652$.

(2 ــ 7) نقاط التوازن في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين

إن أحد المميزات الهامة للاستراتيجيات المثلى في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين هو أنه لو قام اللاعبان A و B بلعب استراتيجياتهم المثلى فمن الواضح عندئذٍ أنه لن يحصل أي ضرر لأي منهما فيما لو قام الآخر بتغيير استراتيجية . ولتوضيح ذلك لنفرض أن الاستراتيجية المثلى لـ A و B هي المتجهة (A^*, B^*) بالمتجه الاحتمالي (X^* , Y^*) (إن استخدام كلمة متجه هنا يعود إلى أن الاستراتيجية المثلى قد تكون مختلطة أو خالصة) عندئذٍ لو لعب A (B) استراتيجيته المثلى X^* (Y^*) ولو قام B (A) بلعب أي استراتيجية أخرى غير Y^* (X^*) فإن ذلك لن يؤثر على نتيجة A (B) لأن B (A) لن يحصل عندئذٍ على عائد أفضل من ذلك الذي يحصل عليه بلعبه Y^* (X^*) . إن هذه الميزة خاصة بالاستراتيجيات المثلى فقط والتي يطلق عليها اسم استراتيجيات أو نقاط متوازنة (Equilibrium points) والتي تعرف رياضياً كما يلي :

تعريف (2 ــ 2)

لنفرض أن S_A ، S_B ترمز لمجموعة الاستراتيجيات الممكنة لـــ A و B على الترتيب وأن $e(X,Y)$ ترمز للعائد المتوقع من استخدام A للاستراتيجية X واستخدام B للاستراتيجية Y . إذا كان $X^* \in S_A$ و $Y^* \in S_B$ فإننا نقول عن الزوج (X^*,Y^*) أنه نقطة توازن إذا تحقق الشط التالي :

$$e(X,Y^*) \le e(X^*,Y^*) \le e(X^*,Y) \quad \text{من أجل أي } X \in S_A \text{ و } Y \in S_B \qquad (6.2)$$

وبصورة أكـــثر تحـــديداً لو رمزنا بـــ $e_A(.,.)$ و $e_B(.,.)$ للعوائد المتوقعة للاعبين A و B على الترتيب فإننا نقول عن الزوج (X^*,Y^*) أنه نقطة توازن إذا كان :

$$e_A(X,Y^*) \le e_A(X^*,Y^*) \text{ من أجل أي } X \in S_A \text{ و } e_B(X^*,Y) \le e_B(X^*,Y^*) \text{ من أجل } Y \in S_B$$

ومما تجدر الإشارة إليه أنه قد يوجد للمباراة أكثر من نقطة توازن فمـــثلاً لـــو أخـــذنا المباراة

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

نجد أنها لها نقطتان سرجيتان تقابلان الاستراتيجيتين (A_1,B_1) و (A_1,B_3) (لاحظ أنه يمكن اختصار المباراة G إلى $G^1 = [2\ 2]$ والتي لها أيضاً نفس النقطتين السرجيتين) فكل من هاتين الاستراتيجيتين يقابل نقطة توازن للمباراة بالقيمة $\upsilon = 2$ وبشكل عام فإن النتيجتين التاليتين صحيحتان .

نظرية (2 ــ 4)

تتساوى قيم أي مباراة ذات مجموع صفري لشخصين عند جميع نقاط التوازن .

نظرية (2 ــ 5)

في أي مباراة ذات مجموع صفري لشخصين إذا كانت $X^* \in S_A$ و $Y^* \in S_B$ فإن النقطة (X^*,Y^*) هي نقطـــة توازن إذاً وفقط إذا كانت (X^*,Y^*) حلاً للمباراة

وكان $e(X^*, Y^*) = \upsilon$ حيث υ هي قيمة المباراة ، وينتج عن ذلك أنه إذا وجد للمباراة أكثر من حل فإن للمباراة نفس القيمة عند جميع هذه الحلول .

ثمة نتيجة هامة أخرى تتعلق بنقاط التوازن وهي :

نظرية (2 ــ 6)

إذا كانت كل من (X_1,Y_1) و (X_2,Y_2) هي نقاط توازن فإن كلاً من (X_1,Y_2) و (X_2,Y_1) هي نقاط الاتزان وعندئذٍ $E(X_1,Y_1) = e(X_1,Y_2) = e(X_2,Y_1)$.

إنتهى الإقتباس من كتاب: أساسيات نظرية المباريات تأليف د. زيد تميم البلخي

نظرية المباريات: تتعلق بحالات أخذ قرار والتي يكون فيها متنافسين أذكياء لكل منهما أهداف متضاربة مع الآخر ويحاول التفوق على خصمه.

الميزة الأساسية في نظرية المباريات لشخصين *Two-person Game Theory* هي: كل من اللاعبين يجب ان يتخذ قرار حاسم مع جهله لقرار اللاعب الآخر. فقط بعد إلتزام كليهما بقراره يمكن لكل لاعب أن يعلم بقرار اللاعب الآخر وكل لاعب يتحصل على عائد *Payoff* يعتمد كليا على القرارين المتخذة.

كمثال: شركتين مختلفتين ينتجان منتج متشابه (شركة المراعي و شركة الصافي مثلا) كل منهم يحاول بإستراجيات مختلفة كسب نسبة من السوق أعلى.

تقسم نظرية المباريات لشخصين بحسب فيما إذا كانت العائدات ذات مجموع ثابت *Constant Sum* أو مجموع متغير *Variable Sum*.

تعاريف:

اللاعبين *Players* : إثنان أو أكثر من المتنافسين.

إستراتيجيات *Strategies*: مجموعة من السياسات والخطط .

اللعبة الإستراتيجية *Strategic Game*: سيناريو أو حالة يكون فيها لاعبين أو أكثر في حالة إختيار إستراتجيات للتفوق على منافسه.

المدفوعات *Payoff*: لكل إستراتيجية مدفوع وهو القيمة التي يتحصل عليها اللاعب نتيجة إختيارة لتلك الإستراتيجية.

مصلحة (أو فائدة) *Utility*: مقياس غيرموضوعي أو شخصي لرضاء أو إرتياح أو قيمة للاعب تأتي من نتيجة معينة للمباراة.

إستراتيجية التوازن *Equilibrium Strategy*: "أفضل" إستراتيجية للاعب بحيث تعطيه أعلى عائد أمام جميع الإستراتيجيات المختارة لمنافسه.

التوازن في مباراة *Equilibrium in a Game*: تركيبة أو مجموعة من إستراتيجيات اللاعبين والتي هي أفضل إستجابة (أو رد) لبعضهم البعض.

اللعب المنطقي (أو العقلاني) *Rational Play*: وفيه يختار اللاعبين إستراتيجيات بهدف تعظيم عائداتهم.

مباريات المجموع الثابت *Constant-Sum* والمجموع الصفري *Zero-Sum*: وهي المباريات التي يكون فيها مجموع العائدات للاعبين ثابت أو صفر. هذا النوع من المباريات تسمى مباريات الصراع المحض *Games of Pure Conflict* وفيها خسارة لاعب مكسب للآخر.

الإستراتيجية المختلطة *Mixed Strategy*: خليط من الإستراتيجيات البحتة تحدد بطريقة عشوائية.

مباريات الحركة المتزامنة *Simultaneous-Move Game*: وفيها تكون حركات (أو إختيار إستراتجيات) اللاعبين في نفس الوقت أو متزامنة أو غير مرئية لبعضهم حتى يتم كشفها في آن واحد.

الحركة التتابعية *Sequential-Move* أو المباريات الحركية *Dynamic Games*: وفيها تكون حركات (أو إختيار إستراتيجيات) اللاعبين متتابعة أو بترتيب معين بحيث يعرفها منافسه ثم يعمل على أساسها.

مباريات المرحلة الوحيدة *Single-Stage Games* : المباريات التي تلعب مرة واحدة تسمى وحيدة المرحلة *Single-Stage* أو ضربة واحدة *One-Shot* أو غير متكررة *Unrepeated Games*.

المباريات المتكررة *Repeated Games*: المباريات التي تلعب عدة مرات تسمى متكررة أو متعددة المراحل *Multi-Stage* أو ذات المرحلة النونية *n-Stage* وفيها يجب لإستراتيجيات اللاعبين وضع القواعد والحركات التي يعتزم القيام بها عند كل تكرار أو مرحلة من مراحل المباراة وتسمى هذه الإستراتيجيات بالإستراتيجيات الموضحة *Meta-Strategies*.

المباريات التعاونية *Cooperative* وغير التعاونية *Non-Cooperative Games*:

المباراة التعاونية يسمح فيها للاعبين بالتواصل وألإتفاق على كيفية سير المبارة على أساس الإستراتيجيات المختارة لكل منهم مع ألإلزام بهذا الإتفاق. وغير التعاونية يعمي كل لاعب إختيارة للإستراتيجية حتى يطلب كشف الإستراجيات لكل لاعب في الوقت المناسب. (ملاحظة: سوف نغطي هنا المباريات غير التعاونية فقط).

مباريات N لاعب *N-Player Games*: N هو عدد اللاعبين في مباراة. إذا كان في المباراة لاعبين إثنين فهي مباراة *2-Players* أو *Two-Person* ولكن إذا كان هناك أكثر من لاعبين إثنين فهي مباراة *N-Player* حيث $N > 2$ (ملاحظة: سوف نعتبر هنا مباريات اللاعبين الإثنين *2-Players* فقط).

خطوة المباراة *Game Move*: وهي الوقت أو النقطة التي يتخذ فيها اللاعب قرارة في إختيار الإستراتيجية المناسبة للرد على منافسه وهي نوعين:

- خطوة واعية *conscious Move* : وهي خطوة واعية ومدروسة لجميع البدائل المتاحة.

- خطوة عشوائية *Random Move*: إختيار لأحد البدائل حسب توزيع إحتمالي محدد بقواعد اللعبة.

معلومات المباريات *Game Information*

إستراتيجيات التوازن للاعبين سوف تعتمد على أي نوع من المعلومات لدي كل منهم عن الآخر. في بعض المباريات يكون للاعبين معرفة جيدة عن بعضهم البعض (وهذا غير صحيح في جميع المباريات). شكل المعلومات في المباراة تقسم كالتالي:

- المعلومات الكاملة *Perfect Information*: كل لاعب يعلم موضعه في المباراة ومع من يلعب.

- معلومات غير كاملة *Incomplete Information*: وفيها لاعب صوري أو وهمي يسمى "الطبيعة" *Nature* أو "الحظ" *Chance* يتحرك بشكل عشوائي غير ملاحظ من بعض أو كل اللاعبين.

- معلومات غير متناظرة *Asymmetric Information*: وهي في حالة كون المعلومات غير كاملة لبعض اللاعبين وكاملة للبعض الآخر أي ليس جميع اللاعبين لديهم نفس المعلومات وقد يكون لبعضهم معلومات خاصة.

مباريات لاعبين بمجموع صفري

Two-Players Zero-sum Games

والتي يكون فيها مكسب اللاعب الأول يساوي خسارة الاعب الثاني أي (المدفوع للاعب *1* = - المدفوع للاعب *2*). ولهذا يكتفى وصف المباراة بالمدفوعات للاعب واحد.

لنسمي الاعب الأول A والثاني B بإستراتجيات m و n على التوالي فتمثل المباراة بمصفوفة المدفوعات *Payoff Matrix* للاعب A كالتالي:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

والتمثيل يبين إذا أستخدم الاعب A الإستراجية i والاعب B الإستراتيجية j فإن المدفوع للاعب A هو a_{ij} واللذي يعني أن اللاعب B يحصل على مدفوع $-a_{ij}$.

الحل الأمثل لمباريات لاعبين بمجموع صفري

مثال:

شركتين صناعة البان تنتج كل منهما نوع من اللبن. الشركة A تعلن بملصقات في الطرق A_1 وإعلانات تلفزيون A_2 وإعلانات صحف A_3 . الشركة B تعلن بملصقات في الطرق B_1 وإعلانات تلفزيون B_2 وإعلانات صحف B_3 بإضافة إلى نشرات توزع على المنازل B_4. نتيجة لكل جهد إعلاني فإن أي شركة تكسب من الشركة الاخرى نسبة من السوق. مصفوفة المدفوعات التالية تعطي نسبة السوق للشركة A:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$Rowmin$	
A_1	8	−2	9	−3	−3	
A_2	6	5	6	8	5	← $Maxmin$
A_3	−2	4	−9	5	−9	
$Column$ max	8	5 ↑	9	8		
		$Minimax$				

حل المباراة يعتمد على مبدأ الحصول على أفضل السيئ *Best of the Worst* لكل لاعب أو *Maxmin*. إذا أختارت الشركة A الإستراتيجية A_1 فبغض النظر عن ما تفعله الشركة B فإن أسوأ ما يمكن أن يحدث للشركة A هو خسارة 3.0% من نصيبها في السوق للشركة B. وهذا مبين بالقيمة الصغرى للسطر الأول. بالمثل فإن أسوأ نتيجة للإستراجية A_2 هو حصول الشركة A على 5% من نصيب B في السوق. و أسوأ نتيجة للإستراتيجية A_3 هو خسارة 9% من نصيب A لمنافستها B. هذه النتائج موجودة تحت العمود "*Rowmin*". للحصول على أفضل الأسوء فإن الشركة A تختار الإستراجية

A_2 لأنها هي قيمة أعظم الأصغر *Maximin* أو أكبر قيمة بين القيم الصغرى في العمود "*Rowmin*".

الآن لننظر لإستراجيات الشركة B. لأن مصفوفة المدفوعات هي للشركة A فإن أفضل الأسوأ للشركة B هو في تعيين القيمة التي تصغر الأعظم *Minimax* والتي تشير إلى أن أفضل إستراجية للشركة B هي B_2 .

إذا الحل الأمثل للمباراة السابقة هو في إختيار الإستراجيات A_2 و B_2 أي الإعلان في التلفزيون وستكون النتيجة في صالح الشركة A لأنها سوف تكسب *5%* من نصيب الشركة B في السوق. وفي هذه الحالة نقول أن قيمة المباراة *Value of the Game* هي *5%* وأن كلا من A و B أستخدموا حل نقطة السرج *Saddle-point Solution* .

حل نقطة السرج أعاق إختيار إستراتيجية أفضل لكل من الشركتين فمثلا لو أختارت الشركة B إستراتيجية اخرى B_1 أو B_3 أو B_4 فإن الشركة A يمكنها الإستمرار على الإستراتيجية A_2 والتي ستسبب فقدان B لنصيب أكبر من السوق (*6%* أو *8%*). بنفس المنطق لو أختارت A إستراتيجية مختلفة عن A_2 (مثلا A_1 يجعل B تختار B_4 بنتيجة خسارة *9%* لشركة A و A_3 يجعل B تختار B_3 بنتيجة خسارة *2%* لشركة A).

ملاحظة: لا يحتاج ان يكون حل نقطة السرج هو الأمثل لمباراة إستراتيجية واحدة بل يمكن إستخدام أكثر من إستراتيجية.

الحل بواسطة *Excel*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		B1	B2	B3	B4	min		
2	A1	8	-2	9	-3	-3		
3	A2	6	5	6	8	5	max=	5
4	A3	-2	4	-9	5	-9		
5	max	8	5	9	8			
6	min =	5						
7								
8	SaddlePoit=	YES						

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		B1	B2	B3	B4	min		
2	A1	8	-2	9	-3	=MIN(B2:E2)		
3	A2	6	5	6	8	=MIN(B3:E3)	max=	=MAX(F2:F4)
4	A3	-2	4	-9	5	=MIN(B4:E4)		
5	max	=MAX(B2:B4)	=MAX(C2:C4)	=MAX(D2:D4)	=MAX(E2:E4)			
6	min =	=MIN(B5:E5)						
7								
8	SaddlePoit=	=IF(H3=B6,"YES","NO")						

مثال على الإستراتيجيات المختلطة

يقوم لاعبين A و B كل منهما برمي عملة بدون أن يشاهد اللاعب الآخر النتيجة فيما إذا كانت H أو T. ثم يقوما بإعلان النتيجة في نفس الوقت. في حالة كون النتيجة متشابهة (أي HH أو TT) يكسب A نقطة من B وإلا يكسب B نقطة.

مصفوفة المدفوعات للاعب A تعطي أقل قيمة للسطر وأعظم قيمة للعمود

لإستراتيجيات A و B

	B_H	B_T	$rowmin$
A_H	1	-1	-1
A_T	-1	1	-1
$colmax$	1	1	

$Maximin = -1$

$Minimax = +1$

$Maxinin \neq Minimax$

إذا المباراة ليس لها حل بإستراتيجية واحدة. بالذات إذا أستخدم اللاعب A الإستراتيجية A_H فإن اللاعب B سيستخدم الإستراتيجية B_T ليكسب نقطة من A. فإذا حدث هذا فإن A يستطيع إستخدام الإستراتيجية A_T ويقلب نتيجة المباراة لصالحه. وهكذا كلاهما سوف يغير إستراتيجيته لكسب النتيجة مما يؤدي لعدم وجود إستراتيجية واحدة لصالح أي منهم.

القيمة المثلى للمباراة سوف تقع في هذه الحالة بين قيم *Minimax* و *Maximin* للمباراة أي

$$Maximin\ value \leq value\ of\ the\ game \leq Minimax\ value$$

حل المباريات مختلطة الإستراجيات

هناك طريقتان لحل المباريات مختلطة الإستراتيجيات:

1- الطريقة البيانية: وتنفع فقط في حالة أحد الاعبين على الأقل يستخدم إستراتيجيتين محضة (إستراتيجية صرفة) على الأكثر. وهذه الطريق مهمه لشرح فكرة نقطة السرج بشكل بياني.

2- طريقة البرمجة الخطية: والتي نستعرضها لاحقا.

الطريقة البيانية *Graphical Solution*

سوف نبدأ بحالة المباريات (2 x n) والتي يكون للاعب A إستراتيجيتين.

في المباراة نفترض أن اللاعب A يخلط إستراتيجياته A_1 و A_2 بالإحتمالات x_1 و $1-x_1$ حيث $0 \le x_1 \le 1$. الاعب B يخلط إستراتيجياته B_1 وحتى B_n بإحتمالات y_1 وحتى y_n حيث $y_j \ge 0$ لقيم $j = 1,2,...,n$

و $y_1 + y_1 + \cdots + y_n = 1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 : A_1 \\ 1-x_1 : A_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix} \end{array}$$

المدفوعات المتوقعة للاعب A للإستراتيجية الصرفة j للاعب B في هذه الحالة تحسب كالتالي:

$$\left(a_{1j} - a_{2j}\right)x_1 + a_{2j},\ j = 1,2,...,n$$

اللاعب A هكذا يحاول تحديد قيمة x_1 والتي تعظم القيمة المتوقعة الصغرى للمدفوعات أي:

$$\max_{x_1} \min_{j} \left\{\left(a_{1j} - a_{2j}\right)x_1 + a_{2j}\right\}$$

مثال

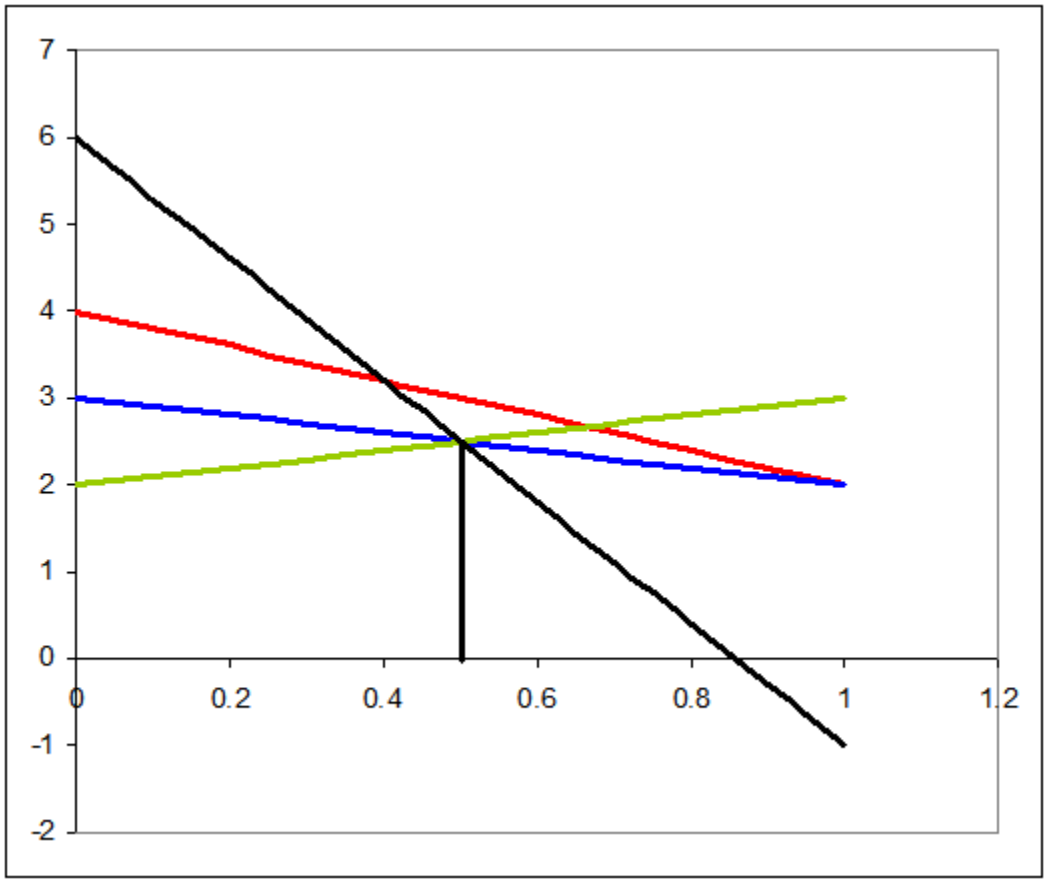
لنعتبر المباراة *2* x*4* والتي مصفوفة المدفوعات للاعب A هي:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

لايوجد حل صافي الإستراتيجية. المدفوعات المتوقعة للاعب A للإستراتيجيات البحتة أو الصافية للاعب B تعطى بالجدول:

B's pure strategy	*A's expected payoff*
1	$-2x_1+4$
2	$-x_1+3$
3	x_1+2
4	$-7x_1+6$

نرسم الأربعة معادلات لقيم $0 \le x_1 \le 1$.



نلاحظ أن قيمة الحل $x_1 = 0.5$

وبالتعويض في دالة السطر 3 أو 4 يعطي:

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, & from\ line\ 3 \\ -7\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{5}{2}, & from\ line\ 4 \end{cases}$$

من الرسم نلاحظ أن أمثل خلط لإستراجيات B تحدد بإستراتيجيتين B_3 و B_4 والتي فيها يكون $y_1 = y_2 = 0$ و $y_4 = 1 - y_3$

و كنتيجة مدفوعات B المتوقعة والناتجة من إستراتيجية A الصرفة تعطي بالجدول:

A's pure strategy	*B' expected payoff*
1	$4y_3$ -1
2	$-4y_3+6$

حل أفضل الأسوأ للاعب B هو نقطة تقاطع الخطين في الجدول السابق أي حل:

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

والذي يعطي: $y_3 = \frac{7}{8}$

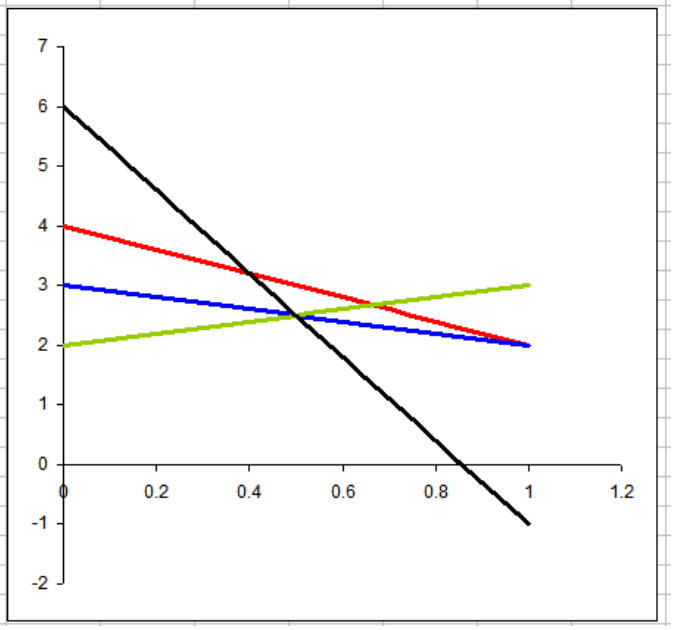
تمرين: أوجد قيمة المباراة بالتعويض بهذة القيمة.

حل هذة المباراة يتطلب من الاعب A خلط الإستراتيجيات A_1 و A_2 بإحتمالات متساوية واللاعب B خلط الإستراتيجيات B_3 و B_4 بإحتمالات $\frac{7}{8}$ و $\frac{1}{8}$.

تمرين: هناك حل آخر للمباراة. أوجد هذا الحل من الرسم البياني.

الحل بإكسل

	A	B	C	D	E
1	x1	B1	B2	B3	B4
2	0	4	3	2	6
3	0.05	3.9	2.95	2.05	5.65
4	0.1	3.8	2.9	2.1	5.3
5	0.15	3.7	2.85	2.15	4.95
6	0.2	3.6	2.8	2.2	4.6
7	0.25	3.5	2.75	2.25	4.25
8	0.3	3.4	2.7	2.3	3.9
9	0.35	3.3	2.65	2.35	3.55
10	0.4	3.2	2.6	2.4	3.2
11	0.45	3.1	2.55	2.45	2.85
12	0.5	3	2.5	2.5	2.5
13	0.55	2.9	2.45	2.55	2.15
14	0.6	2.8	2.4	2.6	1.8
15	0.65	2.7	2.35	2.65	1.45
16	0.7	2.6	2.3	2.7	1.1
17	0.75	2.5	2.25	2.75	0.75
18	0.8	2.4	2.2	2.8	0.4
19	0.85	2.3	2.15	2.85	0.05
20	0.9	2.2	2.1	2.9	-0.3
21	0.95	2.1	2.05	2.95	-0.65
22	1	2	2	3	-1



حل المباريات بطريقة البرمجة الخطية

يمكن تعيين الإحتمالات المثلى $x_1, x_2, \ldots, x_m$ للاعب A بحل مشكلة تعظيم الأقل التالية:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

لندع

$$v = \min\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right\}$$

وهذا يعني

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \quad j = 1,2,...,n$$

ويمكن كتابة مشكلة اللاعب Aعلى شكل LP التالي:

$$\textit{maximize} \quad z = v$$

$$\textit{Subjet to}$$

$$v - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \leq 0, \quad j = 1,2,...,n$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,m$$

$$v \quad \textit{unrestricted}$$

لاحظ أن قيمة المباراة v غير مقيدة الإشارة.

الإستراتيجيات المثلى للاعب B أي $y_1, y_2, ..., y_n$ تتحدد بحل LP التالي:

$$\min_{y_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j \right) \right\}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n$$

ويمكن كتابة مشكلة اللاعب B على شكل LP التالي:

$$\textit{minimize} \quad w = v$$

$$\textit{Subjet to}$$

$$v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq 0, \quad i = 1,2,...,m$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,n$$

$$v \quad \textit{unrestricted}$$

كلا المشكلتين توجد أمثل قيمة للمتغير v (غير مقيدة الإشارة) والذي هو قيمة المباراة.

حل المثال السابق بالبرمجة الخطية

$$maximize: \quad v$$

$$st:$$

$$v - 2x_1 - 4x_2 \le 0$$

$$v - 2x_1 - 3x_2 \le 0$$

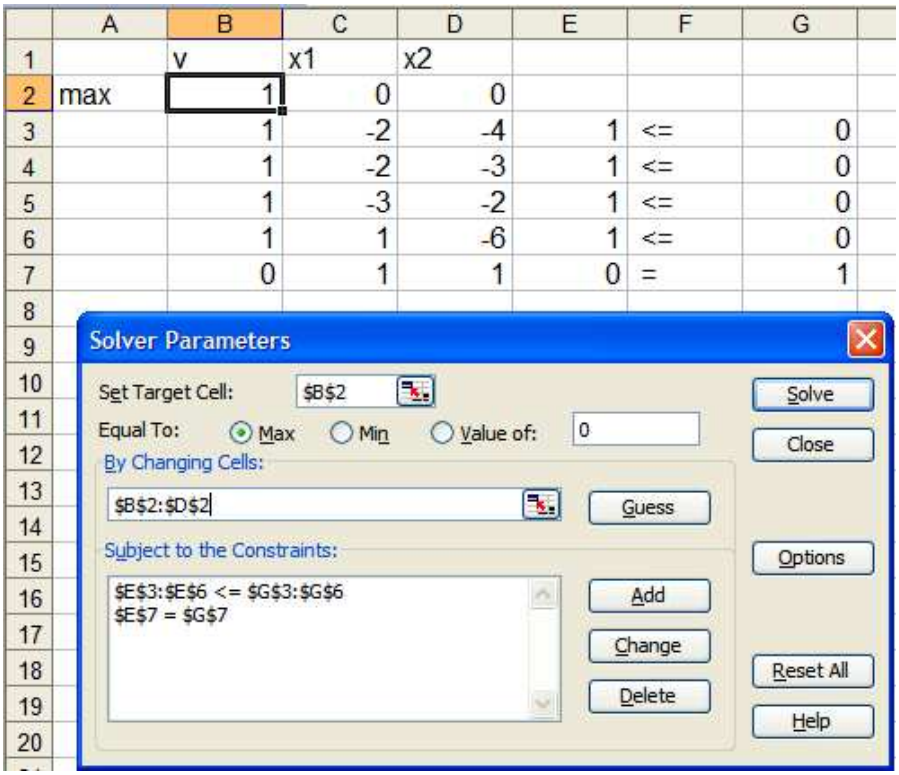
$$v - 3x_1 - 2x_2 \le 0$$

$$v + x_1 - 6x_2 \le 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \ge 0, x_1 \ge 0, v \ unrestricted$$

الحل بواسطة *Excel Solver*



	A	B	C	D	E	F	G
1		v	x1	x2			
2	max	1	0	0			
3		1	-2	-4	1	<=	0
4		1	-2	-3	1	<=	0
5		1	-3	-2	1	<=	0
6		1	1	-6	1	<=	0
7		0	1	1	0	=	1
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							

Solver Options

Max Time: 100 seconds — OK

Iterations: 100 — Cancel

Precision: 0.000001 — Load Model...

Tolerance: 5 % — Save Model...

Convergence: 0.0001 — Help

☑ Assume Linear Model ☐ Use Automatic Scaling

☐ Assume Non-Negative ☐ Show Iteration Results

Estimates: ◉ Tangent ○ Quadratic

Derivatives: ◉ Forward ○ Central

Search: ◉ Newton ○ Conjugate

	A	B	C	D	E	F	G
1		v	x1	x2			
2	max	2.5	0.5	0.5			
3		1	-2	-4	-0.5	<=	0
4		1	-2	-3	-1E-13	<=	0
5		1	-3	-2	-1E-13	<=	0
6		1	1	-6	-1E-13	<=	0
7		0	1	1	1	=	1
8							

	A	B	C	D	E	F	
1		v	x1	x2			
2	max	2.4999999	0.5	0.5			
3		1	-2	-4	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2,B3:D3)	<=	0
4		1	-2	-3	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2,B4:D4)	<=	0
5		1	-3	-2	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2,B5:D5)	<=	0
6		1	1	-6	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2,B6:D6)	<=	0
7		0	1	1	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2,B7:D7)	=	1

تمرين

أوجد حل LP بالنسبة للاعب B.

مثال آخر

حل المباراة التالية بواسطة البرمجة الخطية:

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & r\ \min \\ A_1 & 3 & -1 & -3 & -3 \\ A_2 & -2 & 4 & -1 & -2 \\ A_3 & -5 & -6 & 2 & -6 \\ c\ \max & 3 & 4 & 2 & \end{array}$$

للاعب A نكتب LP

$$\begin{aligned}
&\textit{maximize} \quad v \\
&\textit{st} \\
&\qquad v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 0 \\
&\qquad v - \ x_1 - 4x_2 + 6x_3 \le 0 \\
&\qquad v + 3x_1 + \ x_2 - 2x_3 \le 0 \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\
&\qquad v \textit{ unrestricted}
\end{aligned}$$

للاعب B نكتب LP

$$\begin{aligned}
&\textit{minimize} \quad v \\
&\textit{st} \\
&\qquad v - 3y_1 + \ y_2 + 3y_3 \ge 0 \\
&\qquad v + 2\ y_1 - 4y_2 + \ y_3 \ge 0 \\
&\qquad v + 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 \ge 0 \\
&\qquad y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
&\qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0 \\
&\qquad v \textit{ unrestricted}
\end{aligned}$$

الحل بواسطة *Excel Solver*

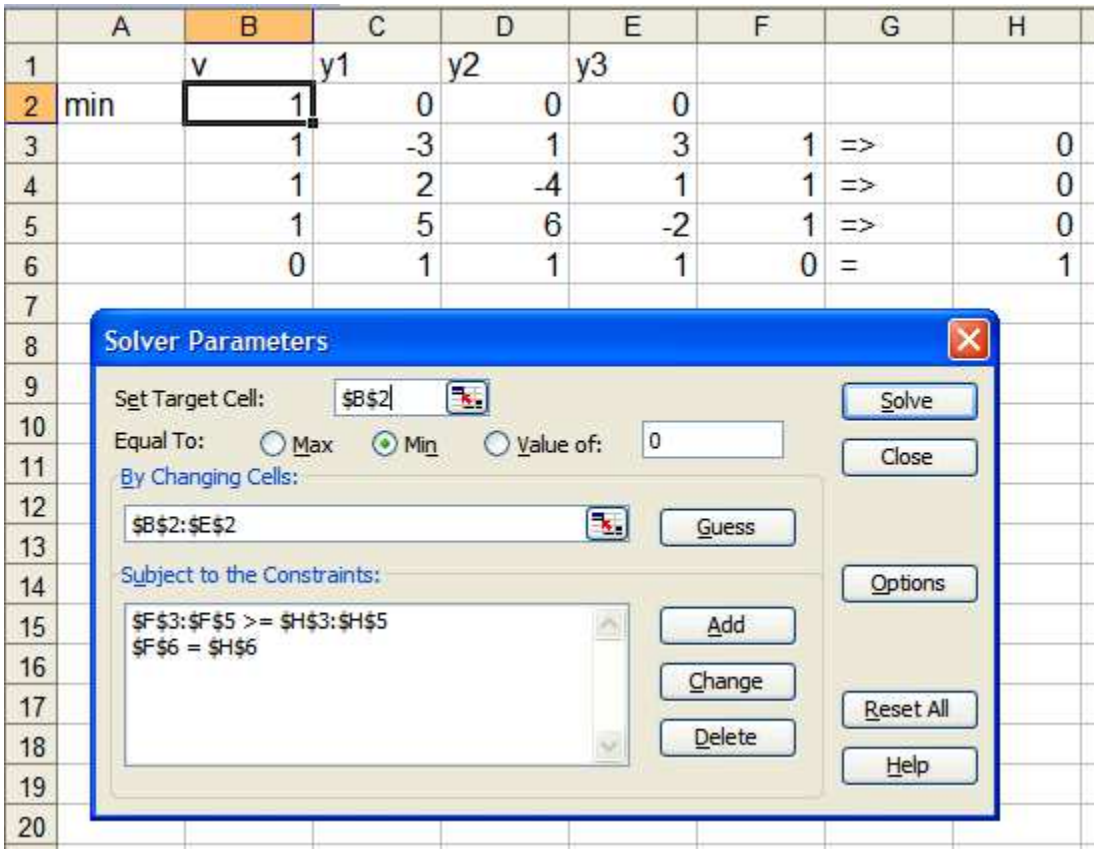
للاعب A:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		v	x1	x2	x3			
2	max	-0.908	0.3945	0.3119	0.2936			
3		1	-3	2	5	-1E-12	<=	0
4		1	1	-4	6	-5E-14	<=	0
5		1	3	1	-2	-7E-13	<=	0
6		0	1	1	1	1	=	1

للاعب B:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		v	y1	y2	y3			
2	min	-0.908	0.3211	0.0826	0.5963			
3		1	-3	1	3	-5E-14	=>	0
4		1	2	-4	1	-9E-13	=>	0
5		1	5	6	-2	-2E-12	=>	0
6		0	1	1	1	1	=	1
7								

طريقة إدخال البيانات في *Solver* للاعب B



مثال آخر

سوبر ماركت A و سوبر ماركت B ينافس أحدهم الآخر للحصول على نسبة أعلى من الزبائن. في بداية كل اسبوع يعلن كل منهما عن تخفيضات في أبرز مايهم الزبون من البضائع ويركز كل منهما على اللحوم والبقالة والخضروات بالإضافة يركز B على المخابز. الجدول التالي يعطي جدول الدفع لـ A :

$$
\begin{array}{cc} & B \\ & \begin{array}{cccc} meat & produce & groceries & bakery \end{array} \\ A \begin{array}{c} meat \\ produce \\ groceries \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & -8 & 6 \\ -2 & 0 & 6 & -4 \\ 2 & -7 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}
$$

نلاحظ عدم وجود إستراتيجية صرفة لأي من السوبرماركتين لهذا فإن أمثل إستراتيجية لـ A هي في إختيار خليط من الإستراتيجيات الثلاثة كل اسبوع بإحتمالات x_1 و x_2 و x_3 لكل من اللحوم والبقالة والخضروات على الترتيب. وتصبح مشكلة A هي التالي:

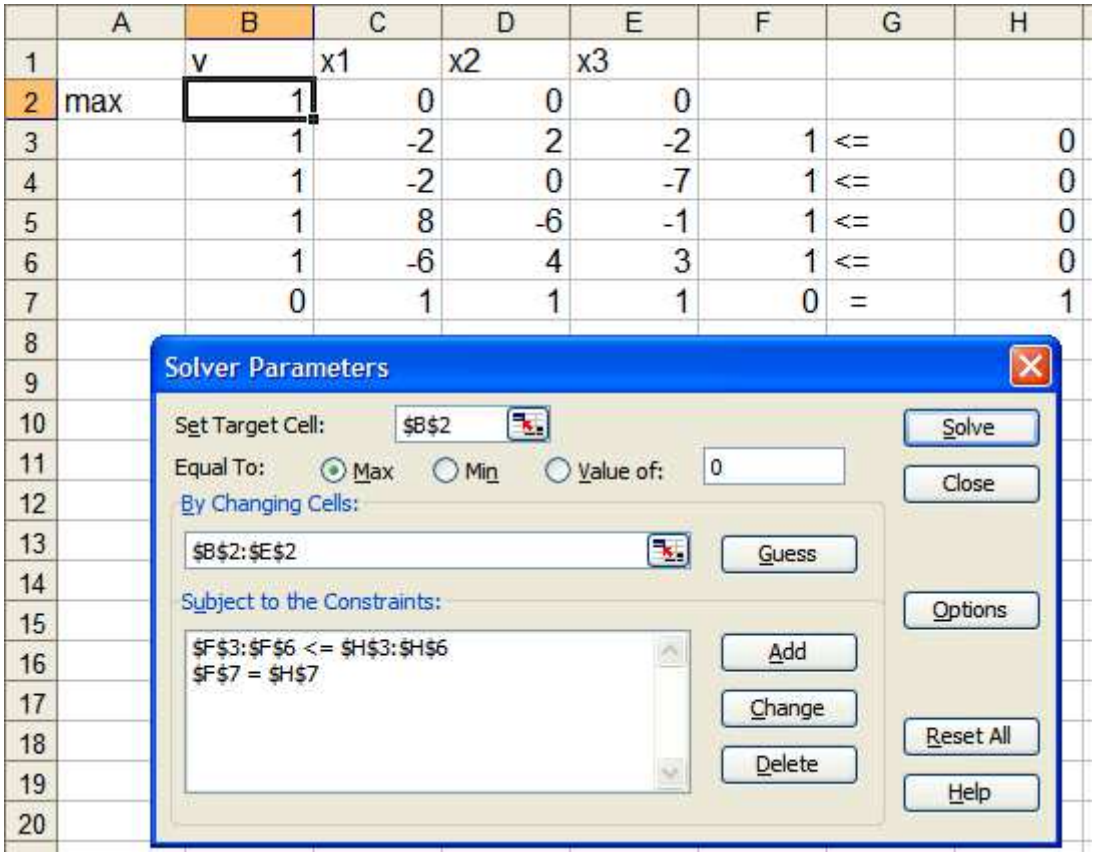
$$
\begin{aligned}
&max \quad v \\
&st \\
&\quad v - 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 0 \\
&\quad v - 2x_1 \qquad - 7x_3 \le 0 \\
&\quad v + 8x_1 - 6x_2 - \quad x_3 \le 0 \\
&\quad v - 6x_1 + 4x_2 + \ 3x_3 \le 0 \\
&\qquad x_1 + \ x_2 + \quad x_3 = 1 \\
&\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0, \ v \ unrestrected
\end{aligned}
$$

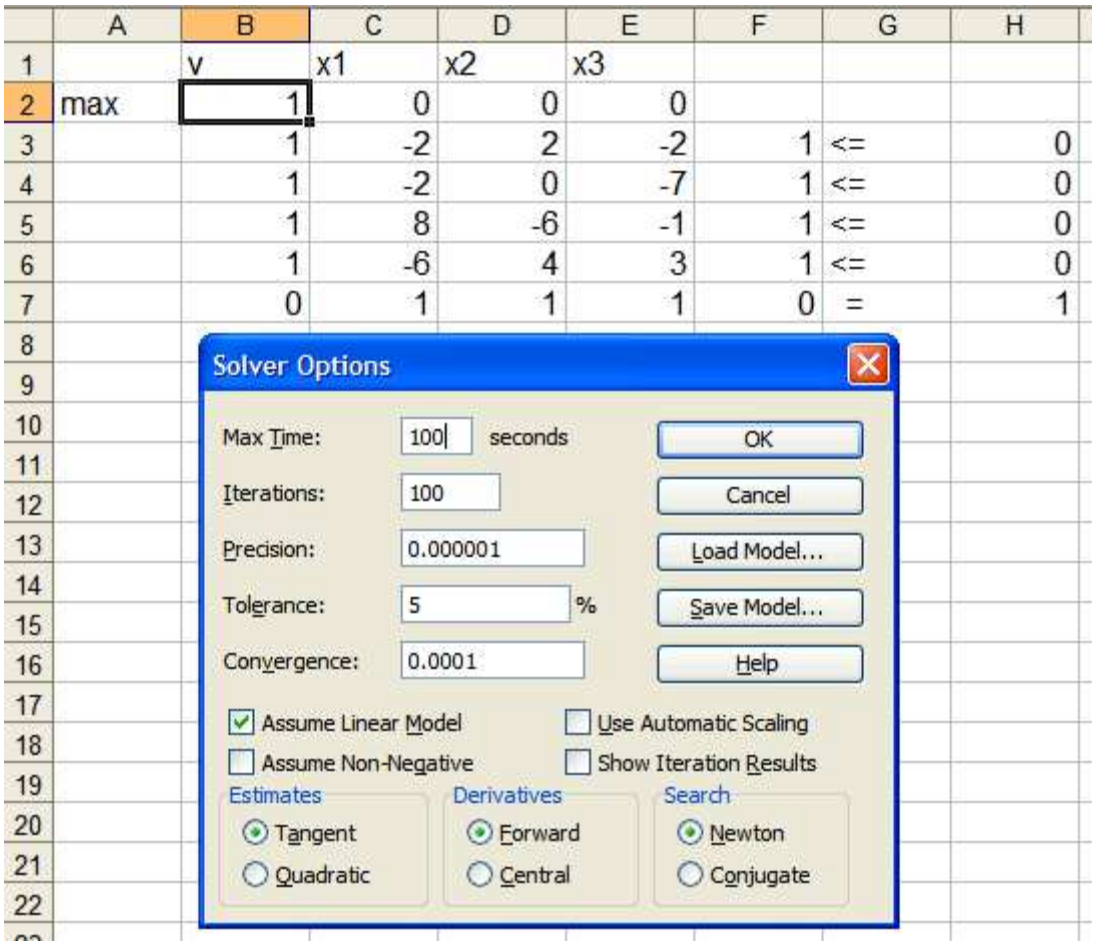
الحل بواسطة ***Solver***

ندخل البيانات السابقة في *Excel*:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		v	x1	x2	x3			
2	max	1	0	0	0			
3		1	-2	2	-2	1	<=	0
4		1	-2	0	-7	1	<=	0
5		1	8	-6	-1	1	<=	0
6		1	-6	4	3	1	<=	0
7		0	1	1	1	0	=	1

	A	B	C	D	E	F	G	
1		v	x1	x2	x3			
2	max	1	0	0	0			
3		1	-2	2	-2	=SUMPRODUCT($B$2:$E$2,B3:E3)	<=	0
4		1	-2	0	-7	=SUMPRODUCT($B$2:$E$2,B4:E4)	<=	0
5		1	8	-6	-1	=SUMPRODUCT($B$2:$E$2,B5:E5)	<=	0
6		1	-6	4	3	=SUMPRODUCT($B$2:$E$2,B6:E6)	<=	0
7		0	1	1	1	=SUMPRODUCT($B$2:$E$2,B7:E7)	=	1


A B C D E F G H
1 v x1 x2 x3
2 max 1 0 0 0
3 1 -2 2 -2 1 <= 0
4 1 -2 0 -7 1 <= 0
5 1 8 -6 -1 1 <= 0
6 1 -6 4 3 1 <= 0
7 0 1 1 1 0 = 1
Solver Parameters
Set Target Cell: $B$2
Equal To: Max Min Value of: 0
By Changing Cells:
$B$2:$E$2
Guess
Subject to the Constraints:
$F$3:$F$6 <= $H$3:$H$6
$F$7 = $H$7
Add
Change
Delete
Solve
Close
Options
Reset All
Help



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		v	x1	x2	x3			
2	max	1	0	0	0			
3		1	-2	2	-2	1	<=	0
4		1	-2	0	-7	1	<=	0
5		1	8	-6	-1	1	<=	0
6		1	-6	4	3	1	<=	0
7		0	1	1	1	0	=	1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		v	x1	x2	x3			
2	max	-2E-12	0.3889	0.5	0.1111			
3		1	-2	2	-2	5E-12	<=	0
4		1	-2	0	-7	-1.556	<=	0
5		1	8	-6	-1	-6E-12	<=	0
6		1	-6	4	3	-4E-12	<=	0
7		0	1	1	1	1	=	1

حالة دراسة *Case Study*:

مباراة ستلعب بين اللاعبين A و B (مباراة بحركة واحدة متزامنة *Single Simultaneous Move Game*) كل لاعب يجب أن يقوم بحركته الوحيدة وفي جهل تام بحركة اللاعب الآخر ثم يتم الإفصاح عن إختياركل منهم ويقوم كل لاعب بدفع مبلغ محدد بجدول المدفوعات التالي للاعب الآخر:

Payoff from A to B

		B's Move	
		a	*b*
	a	4	− 6
A's Move	*b*	− 5	8
	c	3	−4

اللاعب B يجب أن يختار أحد الحركتين (a) او (b) بينما A يختار بين (a) او (b) أو (c) فمثلا لو أختار A الحركة (b) و B الحركة (a) فإن A يدفع لـ B مبلغ 5 نقاط. إذا أختار A الحركة (c) و B الحركة (a) فعلى B دفع 3 نقاط لـ A.

إستراتيجية مينيماكس *The Minimax Strategy*

لا توجد هناك إستراتيجية واضحة في هذه المباراة لأي من اللاعبين. إذا حاول A الحركة (b) آملا في كسب 8 نقاط فإن B سيحاول أيضا الحركة (a) لكي يكسب 5 نقاط. في هذا المثال من الواضح أن كل لاعب يريد الأخذ بعين الإعتبار إستراتيجية عشواء *Random Strategy* أي لاعب يتبع إستراتيجية بحتة والتي هي اخذ نفس الحركة في كل مرة سوف يهزم بسهولة.

لهذا لنعرف:

BMi = probability B makes move i, i = a or b,

AMi = probability A makes move i, i = a, b, or c.

كيف يجب أن يختار اللاعب *B* الإحتمالات *BMi*؟ ربما يلاحظ *B* أن:

إذا *A* أختار الحركة (*a*) فإن خسارته المتوقعة *Expected Loss* هي:

$4\ BM_a - 6\ BM_b$.

إذا *A* أختار الحركة (*b*) فإن خسارته المتوقعة *Expected Loss* هي:

$-5\ BM_a + 8\ BM_b$.

إذا *A* أختار الحركة (*c*) فإن خسارته المتوقعة *ExpecteL loss* هي:

$3\ BM_a - 4\ BM_b$.

إذاً يوجد ثلاثة إمكانيات لخسارة متوقعة إعتمادا على أي قرار متخذ بواسطة اللاعب *A*. إذا كان *B* متحفظ فالمعيار المناسب هو إختيار *BMi* والتي تقلل اعظم خسارة متوقعة *Minimize the Maximum Expected Loss* هذه السياسة تسمى *Minimax Strategy* ونعيد صياغتها بطريقة اخرى: اللآعب *B* يريد إختيار الإحتمالات *BMi* بحيث مهما عمل *A* فإن أعظم خسارة متوقعة للاعب *B* سوف تكون الأقل. إذا كان *LB* هي الخسارة المتوقعة العظمى للاعب *B* فإن هذه المشكلة يمكن صياغتها على شكل برمجة خطية كالتالي (بإستخدام *LINGO*):

```
MIN = LB;
! Probabilities must sum to 1;
    BMa + BMb = 1;
! Expected loss if A chooses (a);
    -LB + 4 * BMa - 6 * BMb <= 0;
! Expected loss if A chooses (b);
    -LB - 5 * BMa + 8 * BMb <= 0;
! Expected loss if A chooses (c);
    -LB + 3 * BMa - 4 * BMb <= 0;
```

الحل هو:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              0.2000000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             2

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           LB       0.2000000            0.000000
                          BMA       0.6000000            0.000000
                          BMB       0.4000000            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1       0.2000000           -1.000000
                            2       0.000000            -0.2000000
                            3       0.2000000            0.000000
                            4       0.000000             0.3500000
                            5       0.000000             0.6500000
```

تفسير هذا هو التالي: لو أن B أختار الحركة (a) بإحتمال 0.6 والحركة (b) بإحتمال 0.4 فإن توقع خسارة B لن تكون اكبر من 0.2 بغض النظر عن أي حركة يختارها اللاعب A. بالنسبة للاعب A سوف نعيد صياغة التفسير السابق بدلالة تعظيم *Maximizing* أقل *Minimum* ربح متوقع *Expected Profit* ونرمز له PA فبدلا من تقليل أعظم خسارة فإن مشكلة A هي:

```
MAX = PA;
! Probabilities sum to 1;
     AMa + AMb + AMc = 1;
! Expected profit if B chooses (a);
    -PA + 4 * AMa - 5 * AMb + 3 * AMc >= 0;
! Expected profit if B chooses (b);
    -PA - 6 * AMa + 8 * AMb - 4 * AMc >= 0;
```

والحل لمشكلة A هو:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              0.2000000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             3

                     Variable           Value        Reduced Cost
                           PA       0.2000000            0.000000
                          AMA       0.000000             0.2000000
                          AMB       0.3500000            0.000000
```

AMC	0.6500000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.2000000	1.000000
2	0.000000	0.2000000
3	0.000000	-0.6000000
4	0.000000	-0.4000000

والتفسير هو: لو أختار A الحركة (b) بإحتمال 0.35 والحركة (c) بإحتمال 0.65 وعدم إختيار الحركة (a) إطلاقا فإن ربحه المتوقع لن يقل عن 0.2. لاحظ أن أقل ربح متوقع للاعب A يساوي أقل خسارة متوقعة للاعب B. من وجهة نظر B الإنتقال المتوقع إلى A هو على الأقل 0.2. فإذا الإنتقال المتوقع *Expected Transfer* الممكن هو 0.2 وهذا يعني إذا كان كلا من اللاعبين يتبع الإستراتيجية العشوائية التي تم إشتقاقها (إيجادها من الحلول السابقة) فعندئذ في كل لعبة للمباراة يوجد إنتقال متوقع مقداره 0.2 وحدة من B إلى A. المباراة منحازة *Biased* لصالح A بمعدل 0.2 نقطة لكل لعبة.

الإستراتيجية التي يتم فيها إختيار بدائل بشكل عشوائي تسمى أحيانا إستراتيجية مختلطة *Mixed Strategy*.

ملاحظة: البرمجة الخطية للاعبين يشكلان المشكلة وثنائيها *LP and Dual LP* .

التوازن *Equilibrium*

سوف نذكر ببعض التعاريف السابقة لكي نقدم لتوازن ناش.

- الإستراتيجية المتزنة *Equilibrium Strategy* هي "أفضل" إستراتيجية للاعب حيث تعطيه "أعلى" عائد مهما كانت الإستراتيجيات المختارة من منافسه.

- التوازن في مباراة *Equilibrium in a game* هو تشكيلة من إستراتيجيات اللاعبين والتي تعطي أفضل إستجابة لبعضهم البعض.

- اللعب الواعي *Rational Play* وفيه يختار اللاعبين إستراتيجيات بهدف تعظيم عوائدهم.

أنواع المباريات (تعريف تابع)

- مباريات الحركة المتزامنة *Simultaneous Moves* (أو *Static-move* أو *Hidden-move*) وهي تلك التي يختار فيها اللاعبين إستراتيجياتهم متزامنين بدون معرفة منافسيهم بذلك الإختيار حتى نهاية المباراة حتى يتم الكشف عن كل الإختيارات لجميع اللاعبين في وقت واحد. وهذا النوع من المباريات يمثل بإستخدام مصفوفات العائدات *Pay-off Matrix* أو الصيغ الإستراتيجية *Strategic Forms*.

- مباريات الحركات المتتابعة أو المتسلسلة *Sequential Moves* أو المباريات الحركية *Dynamic Games* وفيها يتم إختيار اللاعب لإستراتيجية بعد معرفة إختيار اللاعب المنافس لإسترتيجية ما. وتمثل بصيغ الإنتشار *Extensive Forms* أو بشجرات المباريات *Game Trees*.

- مباريات الحركة المتزامنة ومباريات الحركات المتتابعة قد تكون وحيدة المرحلة *Single-Stage* (تلعب مرة واحدة) أو متكررة *Repeated Games* (يكرر اللعب)

توازن الإستراتيجية المسيطرة

Dominant Strategy Equilibrium

وفيها يحاول كل لاعب إختيار إستراتيجيته المسيطرة.

الإستراتيجية المسيطرة: هي تلك التي تعطي أفضل إستجابة لجميع الإستراتيجيات المختارة من كل اللاعبين المنافسين.

توازن ناش

Nash Equilibrium

توازن ناش : مجموعة الإستراتيجيات للاعبين والتي تكون أفضل إستجابة لبعضهم البعض.

أي يختار اللاعبين إستراتيجيات تكون الأفضل إستجابة لأحدهم الآخر. تسمى هذه بإستراتيجيات ناش *Nash Strategies*

تعاريف

الآن نعرف بعض العلاقات للإستراتيجية المسيطرة للاعب A ضد اللاعب B في مباريات الشخصين:

- لنرمز بـ $p(A_i, B_i)$ لعائد اللاعب A من إختياره للإستراتيجية A_i عند إختيار اللاعب B الإستراتيجية B_i.
- $p(A_{-i}, B_i)$ عائد اللاعب A لإختياره إستراتيجية غير A_i عند إختيار B الإستراتيجية B_i.
- $p(A_i, B_{-i})$ عائد A عند إختياره الإستراتيجية A_i وإختيار B إستراتيجية غير B_i.

الإستراتيجية المسيطرة إطلاقا *Strictly Dominant Strategy*

- من التعاريف السابقة نقول أن A_i إستراتيجية مسيطرة إطلاقا للاعب A إذا كان لجميع الإستراتيجيات البديلة الممكنة A_{-i} و B_{-i} فإن:

$$p(A_i, B_i) > p(A_{-i}, B_i)$$

و

$$p(A_i, B_{-i}) > p(A_{-i}, B_{-i})$$

تعاريف

الآن نعرف بعض العلاقات للإستراتيجية المسيطرة للاعب B ضد اللاعب A في مباريات الشخصين:

- لنرمز بـ $p(B_i, A_i)$ لعائد اللاعب B من إختياره للإستراتيجية B_i عند إختيار اللاعب A الإستراتيجية A_i.

- $p(B_{-i}, A_i)$ عائد اللاعب B لإختياره إستراتيجية غير B_i عند إختيار A الإستراتيجية A_i.

- $p(B_i, A_{-i})$ عائد B عند إختياره الإستراتيجية B_i وإختيار A إستراتيجية غير A_i.

الإستراتيجية المسيطرة إطلاقا (يتبع ...)

Strictly Dominant Strategy

- من التعاريف السابقة نقول أن B_i إستراتيجية مسيطرة إطلاقا للاعب B إذا كان لجميع الإستراتيجيات البديلة الممكنة B_{-i} و A_{-i} فإن:

$$p(B_i, A_i) > p(B_{-i}, A_i)$$

و

$$p(B_i, A_{-i}) > p(B_{-i}, A_{-i})$$

صيغ توازن ناش

الإستراتيجيات A_i و B_i تشكل توازن ناش إذا:

$$p(A_i, B_i) > p(A_{-i}, B_i)$$

و

$$p(B_i, A_i) > p(B_{-i}, A_i)$$

ملاحظة

في العلاقات السابقة إذا كانت أي منها مساواة (أي = بدلا من >) فإن توازن ناش يكون ضعيفا *Weak Nash Equilibrium* وإلا يكون توازن ناش قوى *Strong Nash Equilibrium*.

مثال

- مديري شركتين متنافسة يريدا التنسيق معا لوضع إستراتيجيات للأسعار ومصفوفة العائد لهما هي:

		B	
		raise price	*lower price*
A	*raise price*	5,5	1,2
	lower price	2,1	3,3

ملاحظة: في هذا النوع من المباريات ذات المجموع غير الصفري توضع العائدات للاعبين في مصفوفة ثنائية *Bimatrix* كما في الشكل أعلاه.

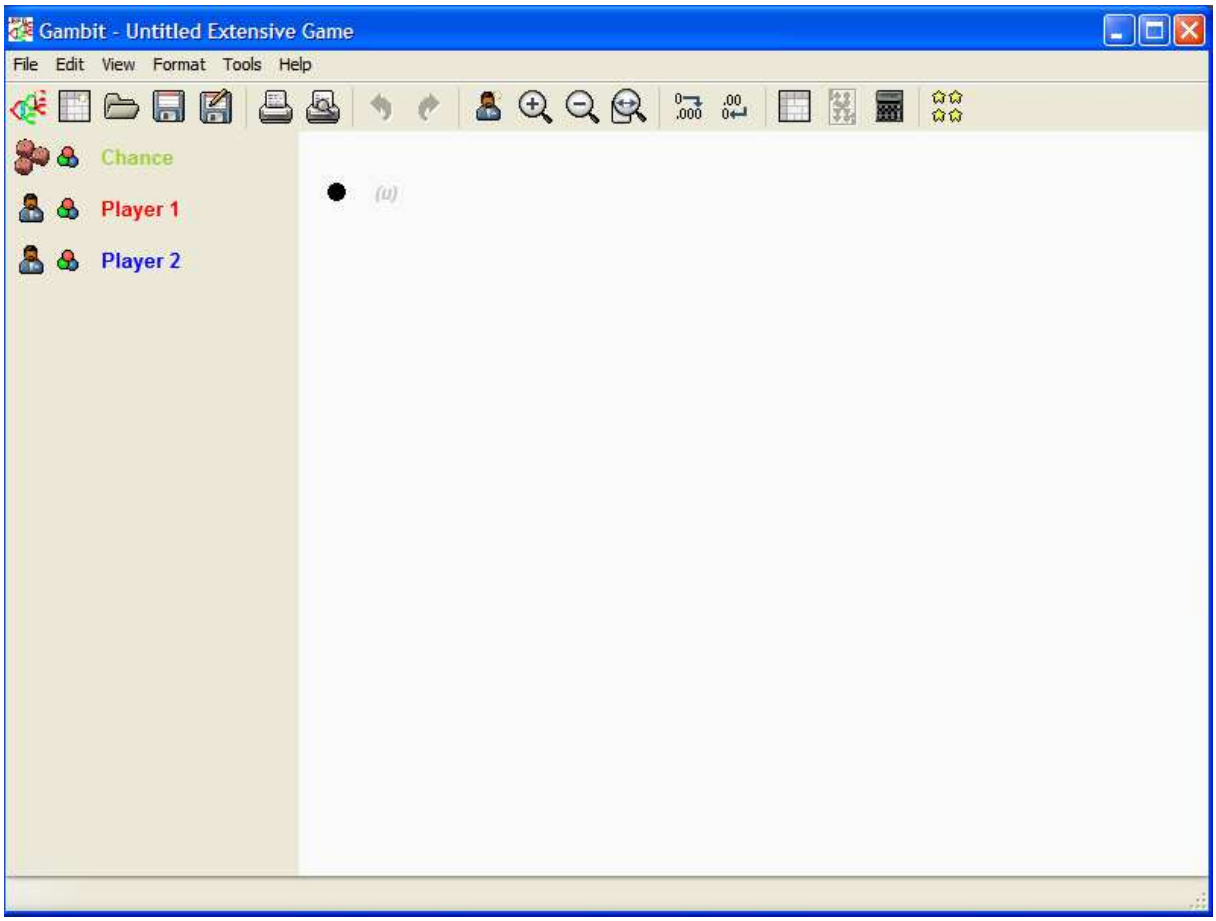
- توازن ناش هو $\{raise\ price, raise\ price\}$

و $\{lower\ price, lower\ price\}$

في التوازن $\{raise\ price, raise\ price\}$ العائد لكليهما أعلى من توازن $\{lower\ price, lower\ price\}$ ولهذا فإن كليهما يفضل الإستراتيجية الاولى وهذه بالبديهة تكون نتيجة المباراة.

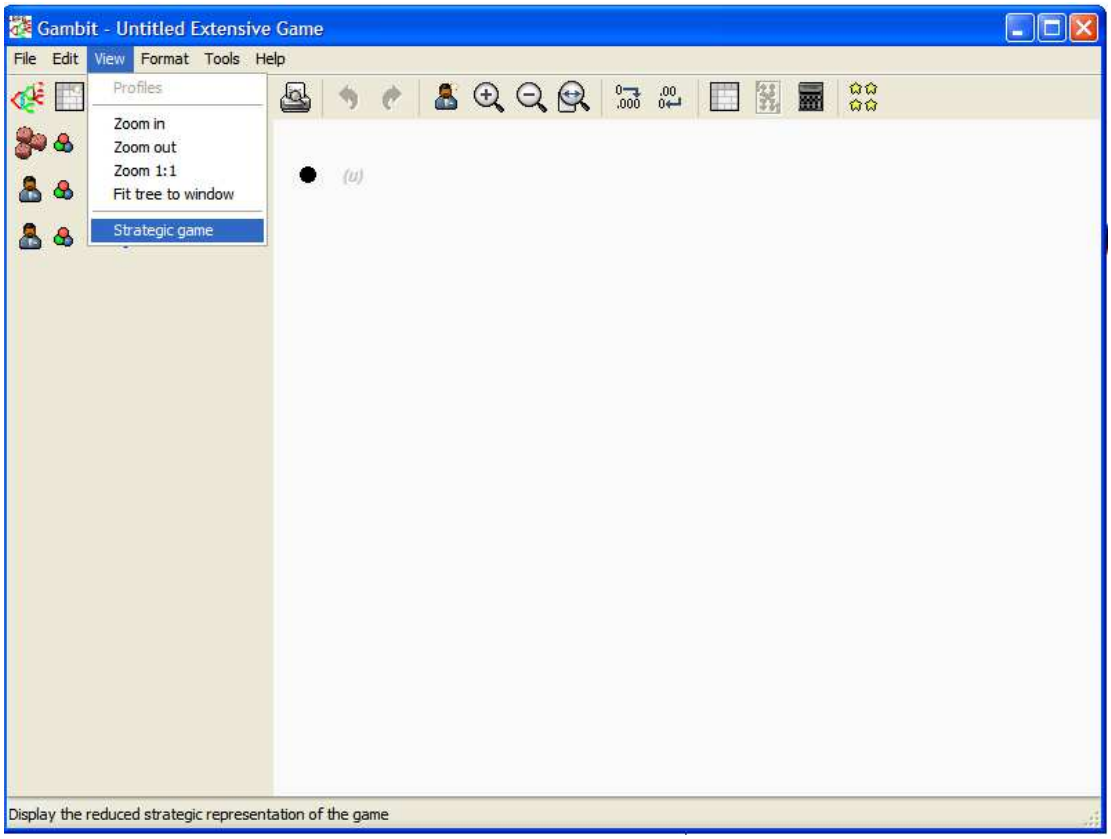
Gambit

Gambit هو برنامج لتصميم وحل وتحليل المباريات ذات الإستراتيجيات المحدودة وغير التعاونية وذات الصيغة الإنتشارية *Extensive Form* و الصيغة الإستراتيجية *Strategy Form*. وهو برنامج مفتوح *OpenSource* ومتوفر في الموقع *http://www.gambit-project.org/*

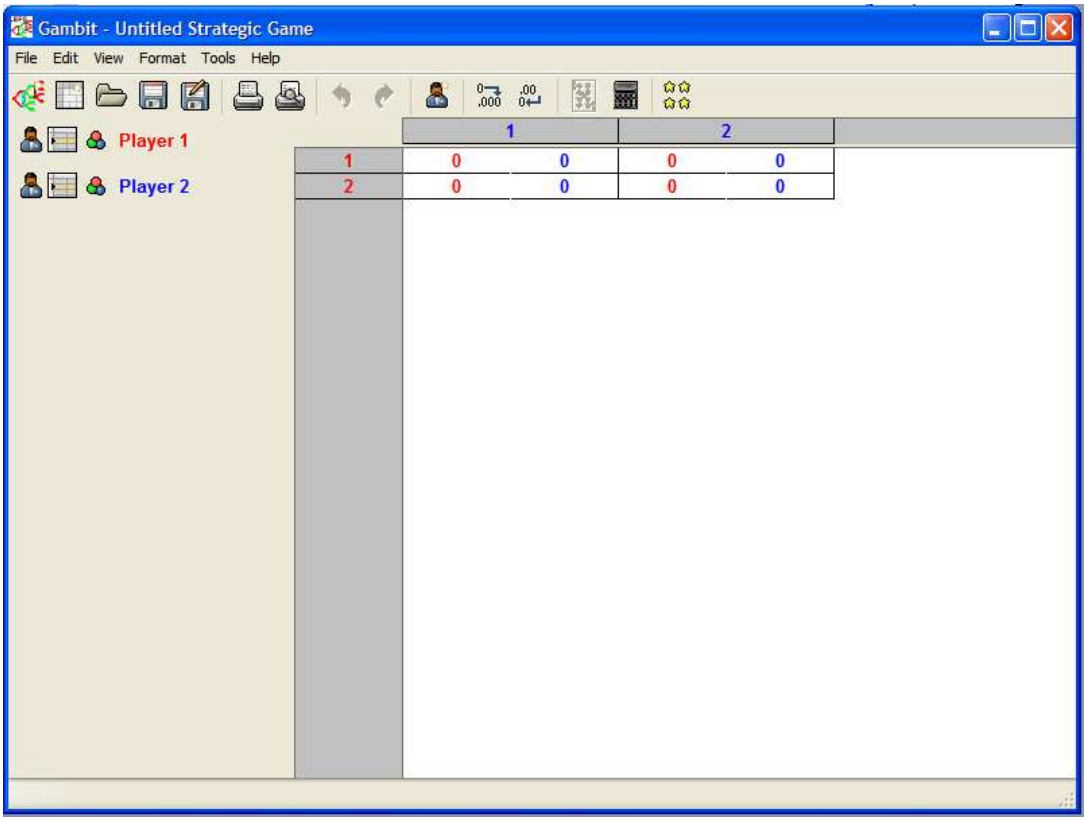


تصميم مباراة بالصيغة الإستراتيجية

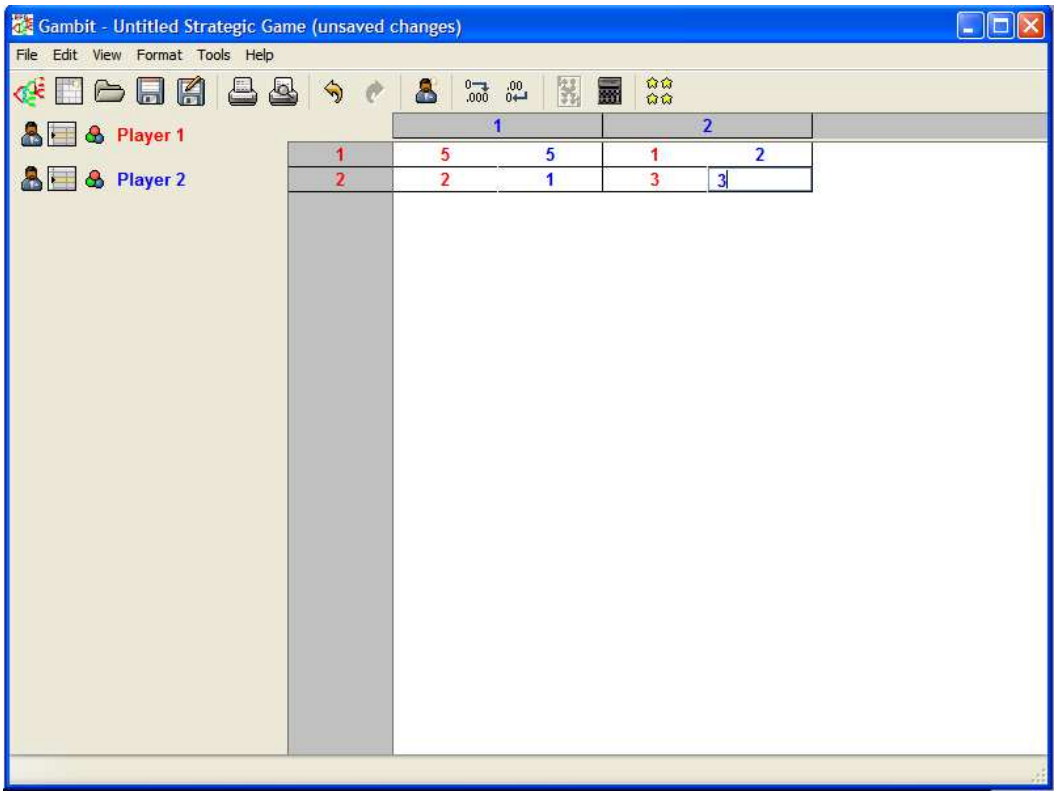
إختار من قائمة الإسقاط *view* ثم *Strategic game*


Gambit - Untitled Extensive Game
File
Edit
View
Format
Tools
Help
Profiles
Zoom in
Zoom out
Zoom 1:1
Fit tree to window
Strategic game
(u)
Display the reduced strategic representation of the game

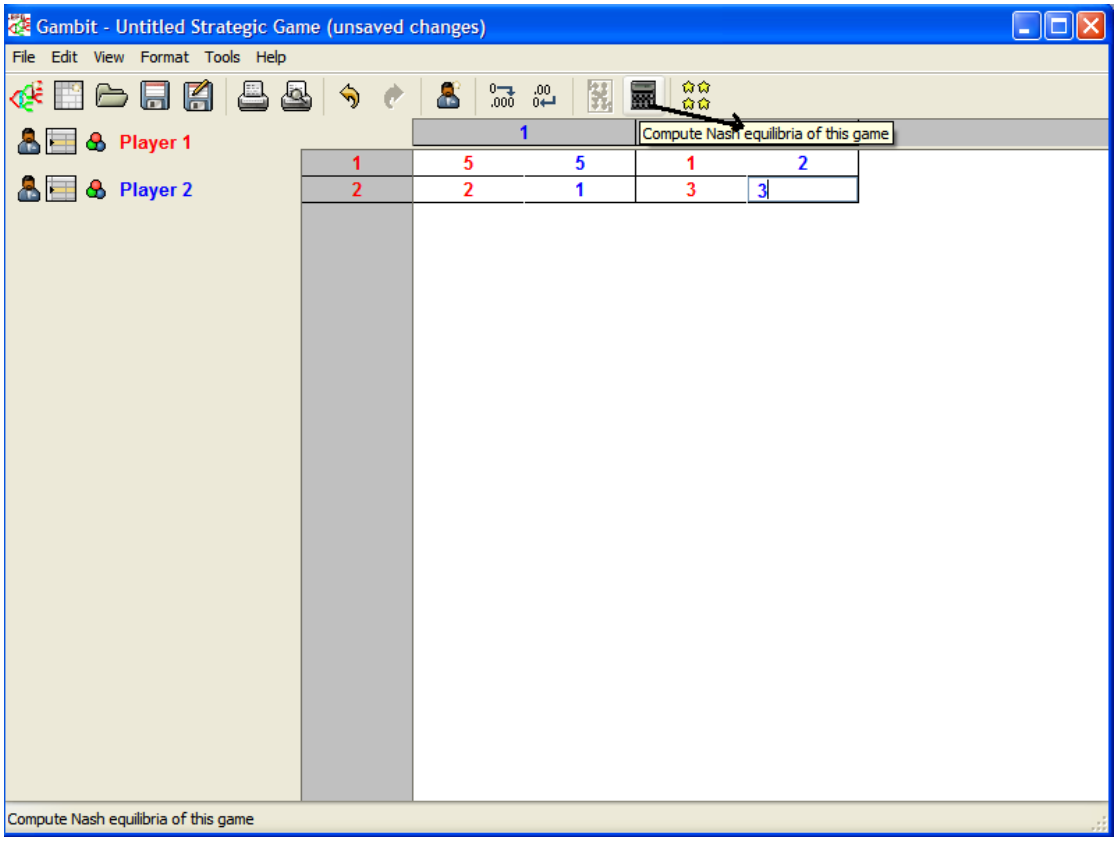
فيظهر



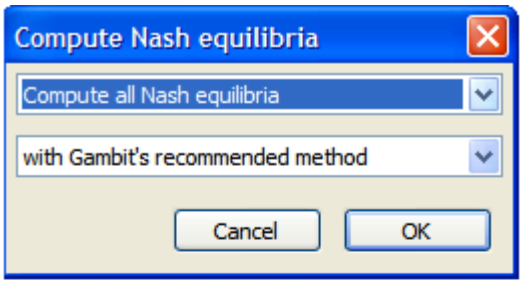
من المثال السابق ندخل قيم العائدات للاعبين. لاحظ أن اللون الأحمر للاعب A والأزرق للاعب B.

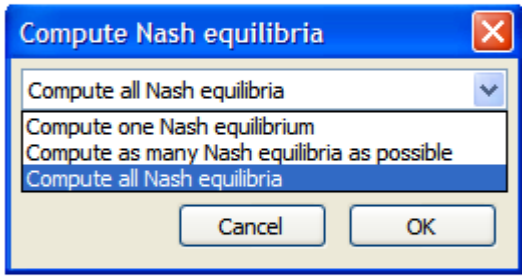

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Player 1
Player 2
1
2
1 5 5 1 2
2 2 1 3 3

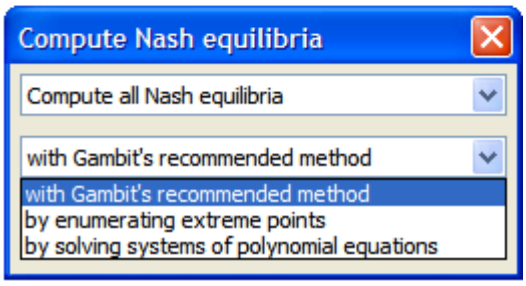
لحساب توازن ناش نضغط *Compute Nash equlibria*



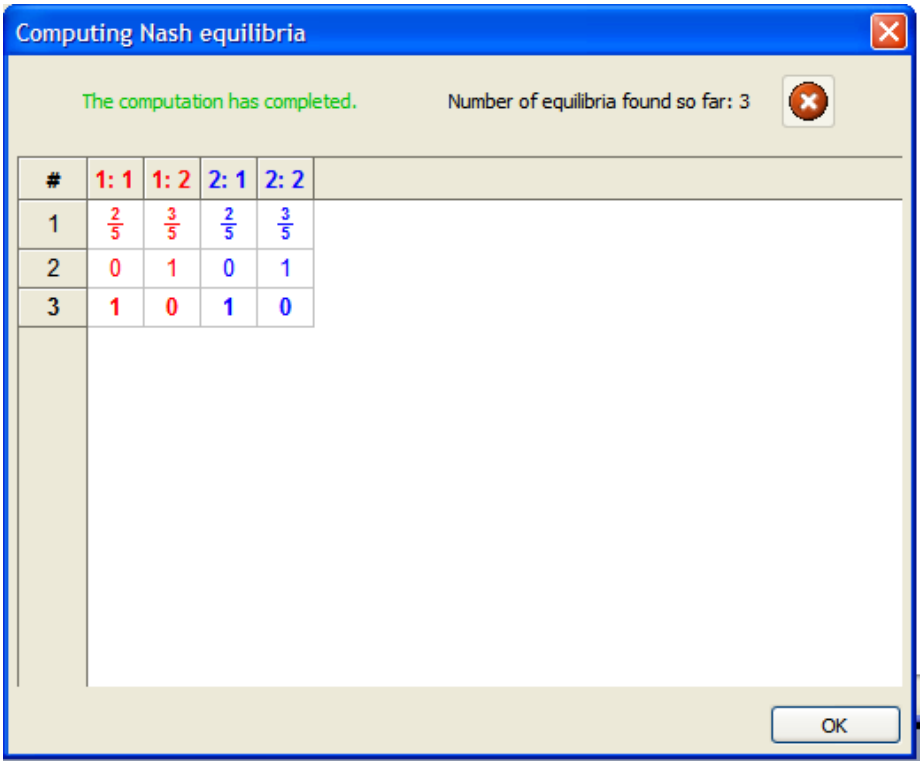
فتظهر النافذة وخياراتها. نختار القيم الإفتراضية. ونضغط *OK*.



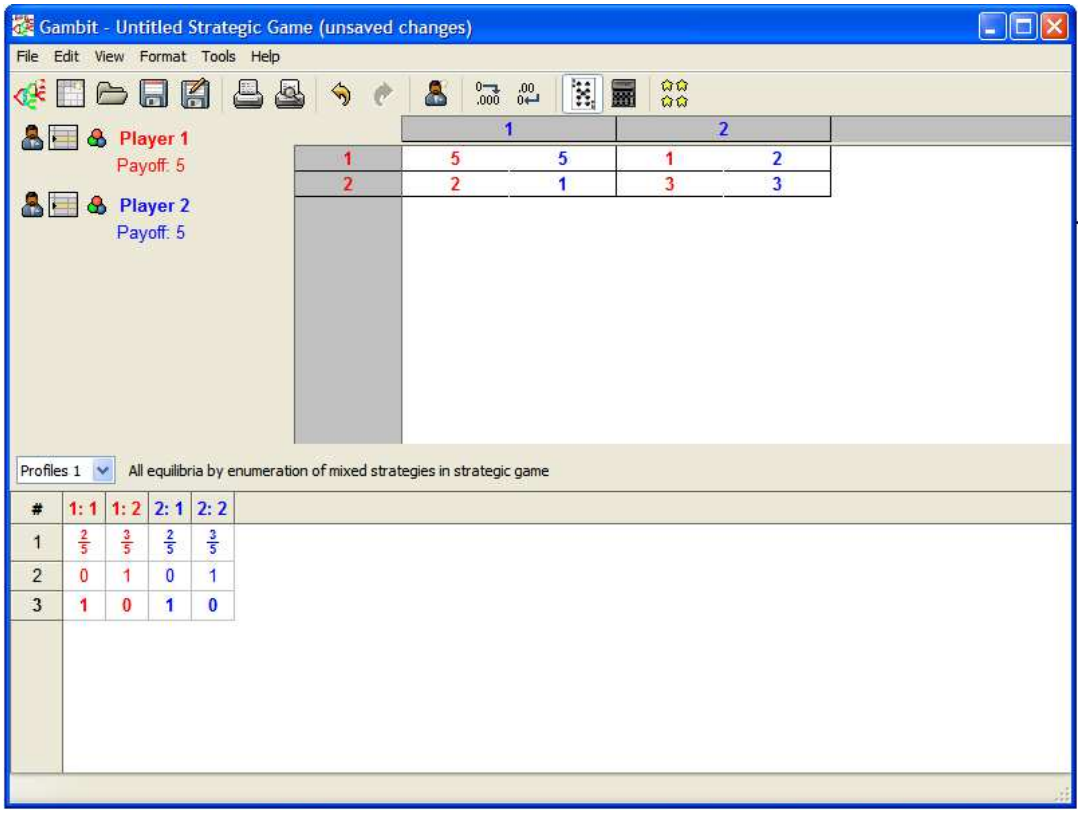




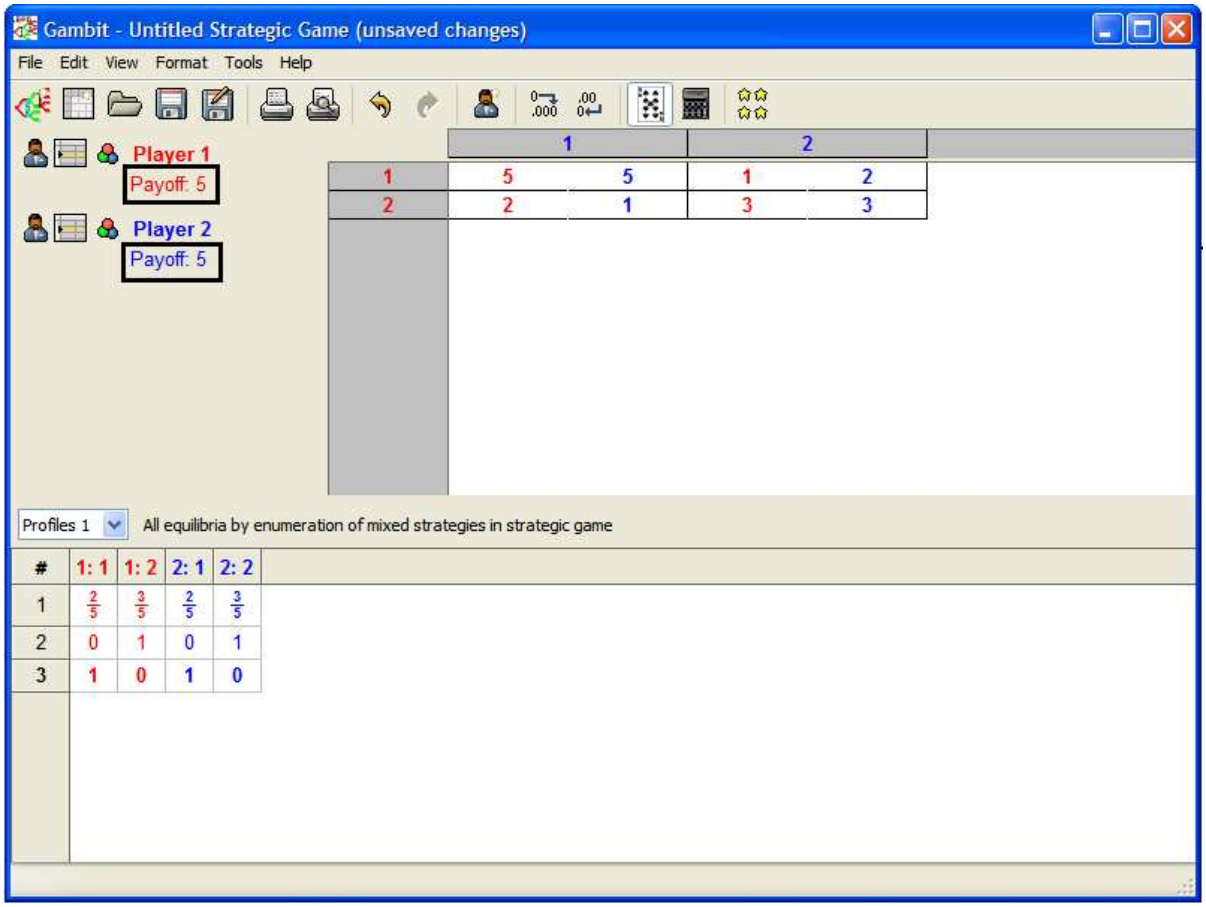
فينتج


Computing Nash equilibria
The computation has completed.
Number of equilibria found so far: 3
#
1: 1
1: 2
2: 1
2: 2
1
2/5
3/5
2/5
3/5
2
0
1
0
1
3
1
0
1
0
OK

و


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Player 1
Payoff: 5
Player 2
Payoff: 5
1 2
1 5 5 1 2
2 2 1 3 3
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: 1 1: 2 2: 1 2: 2
1 2/5 3/5 2/5 3/5
2 0 1 0 1
3 1 0 1 0

لاحظ العائد للاعبين

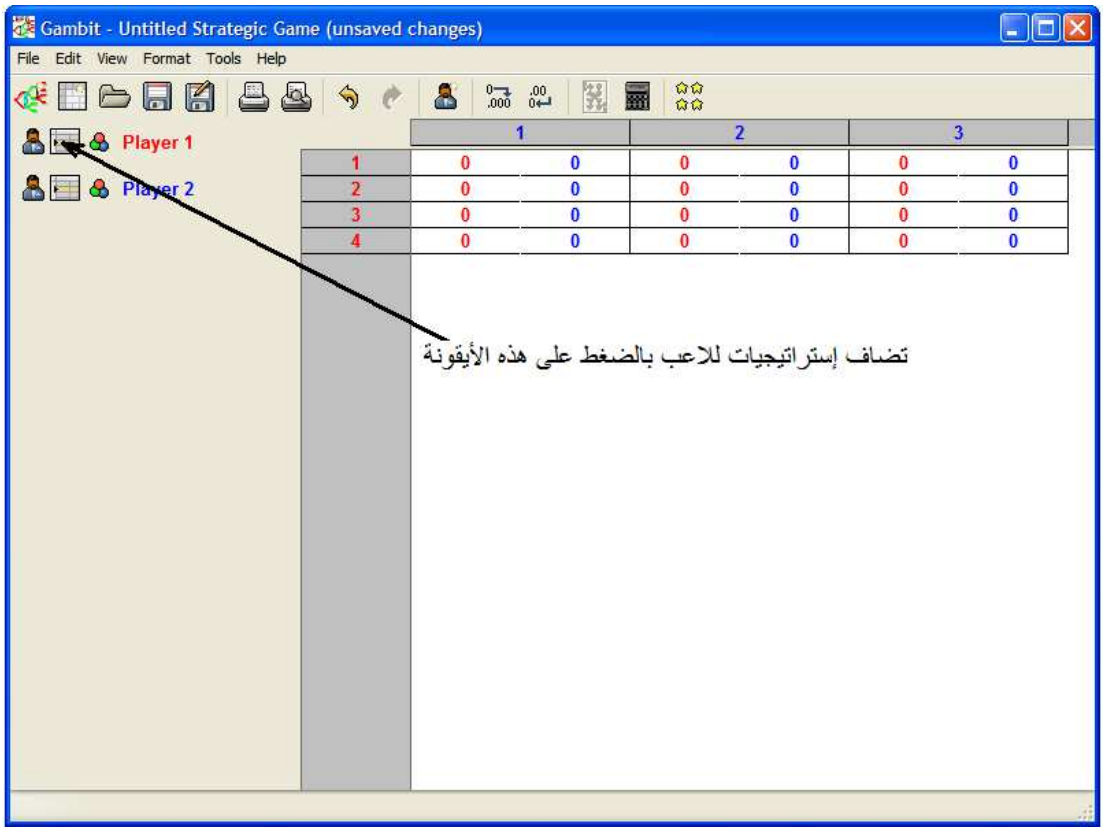


تمرين:

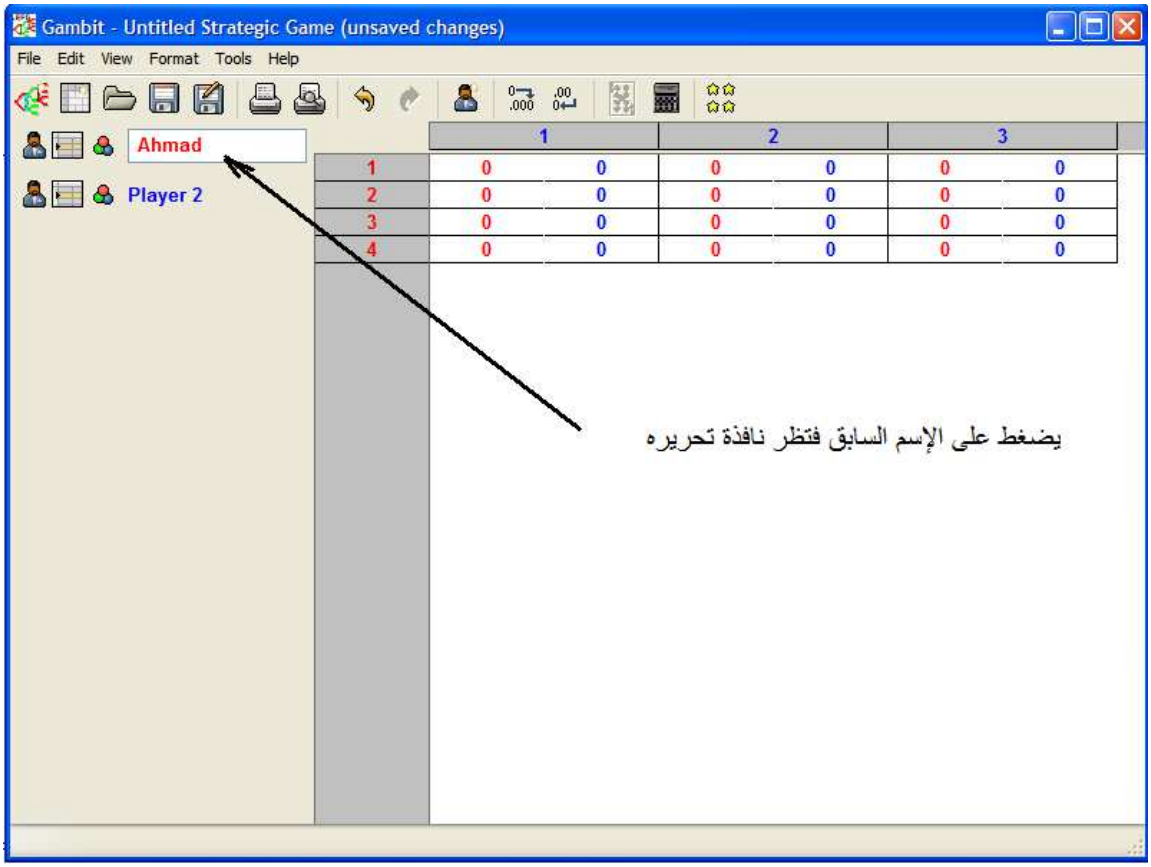
من الشكل السابق فسر النتائج.

تغيير بعض الخواص في *Gambit*

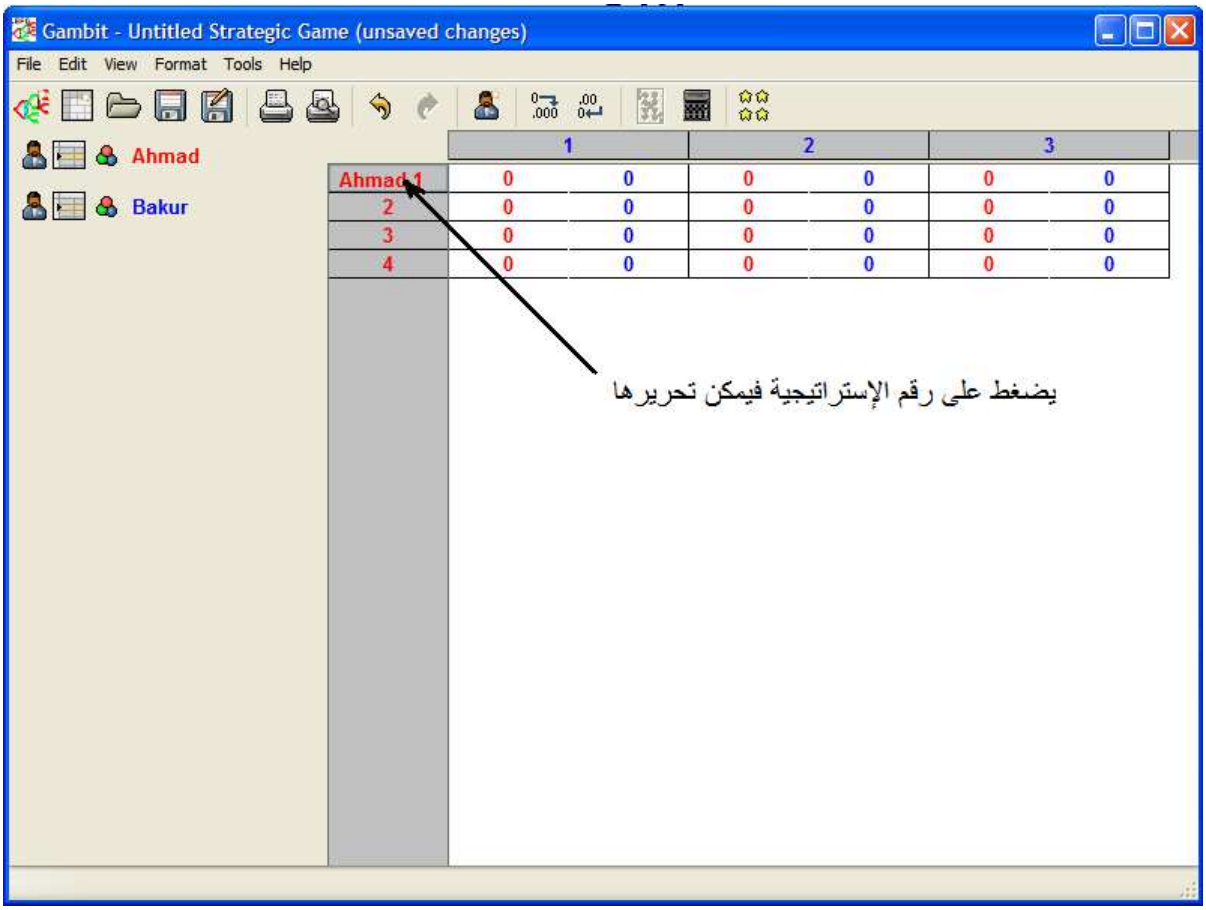
إضافة إستراتيجيات



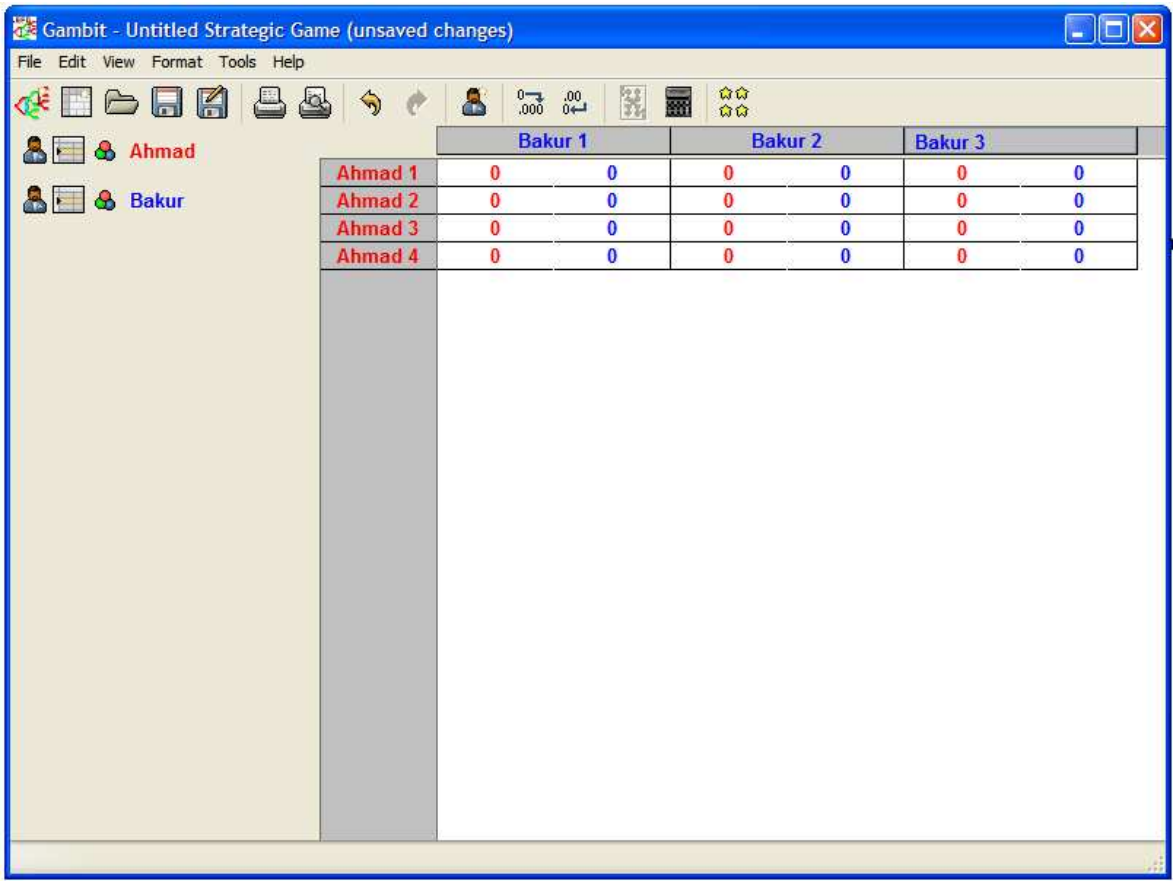
تغيير أسماء اللاعبين



تغيير أسماء أو أرقام الإستراتيجيات

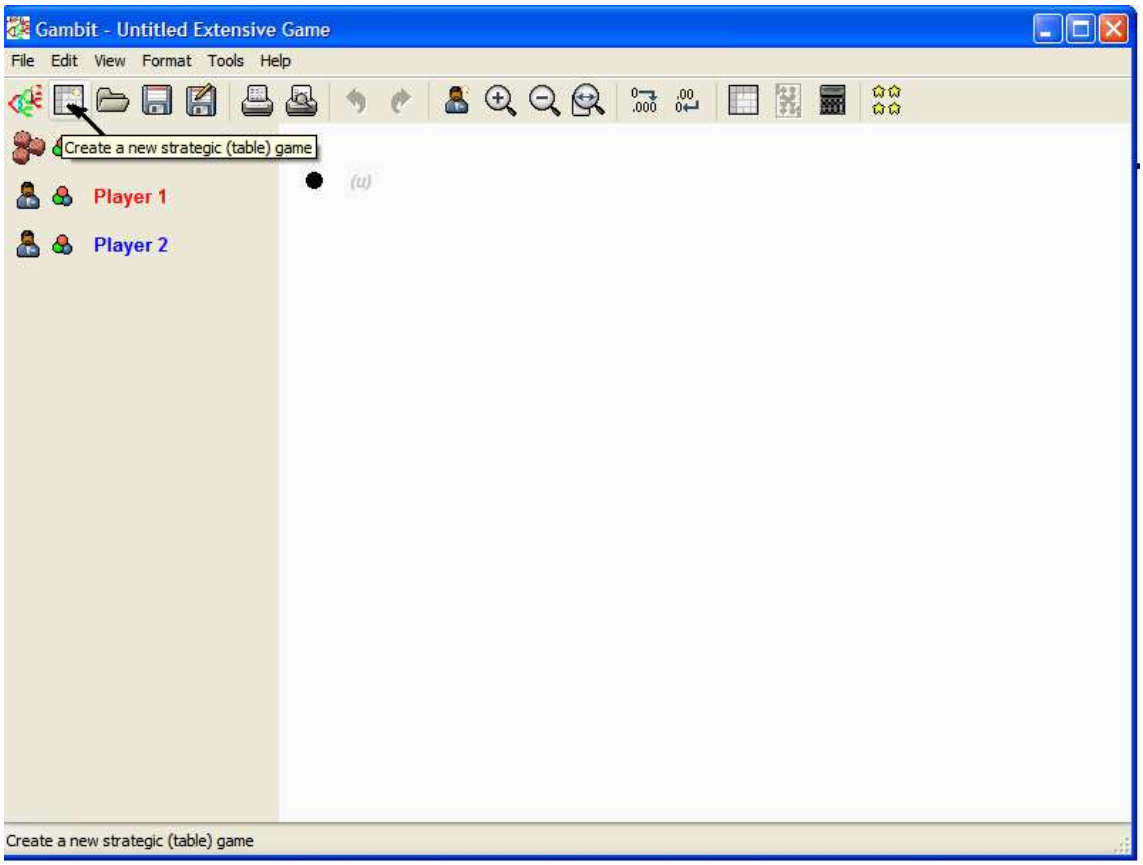


مباراة بعد تغيير الأسماء

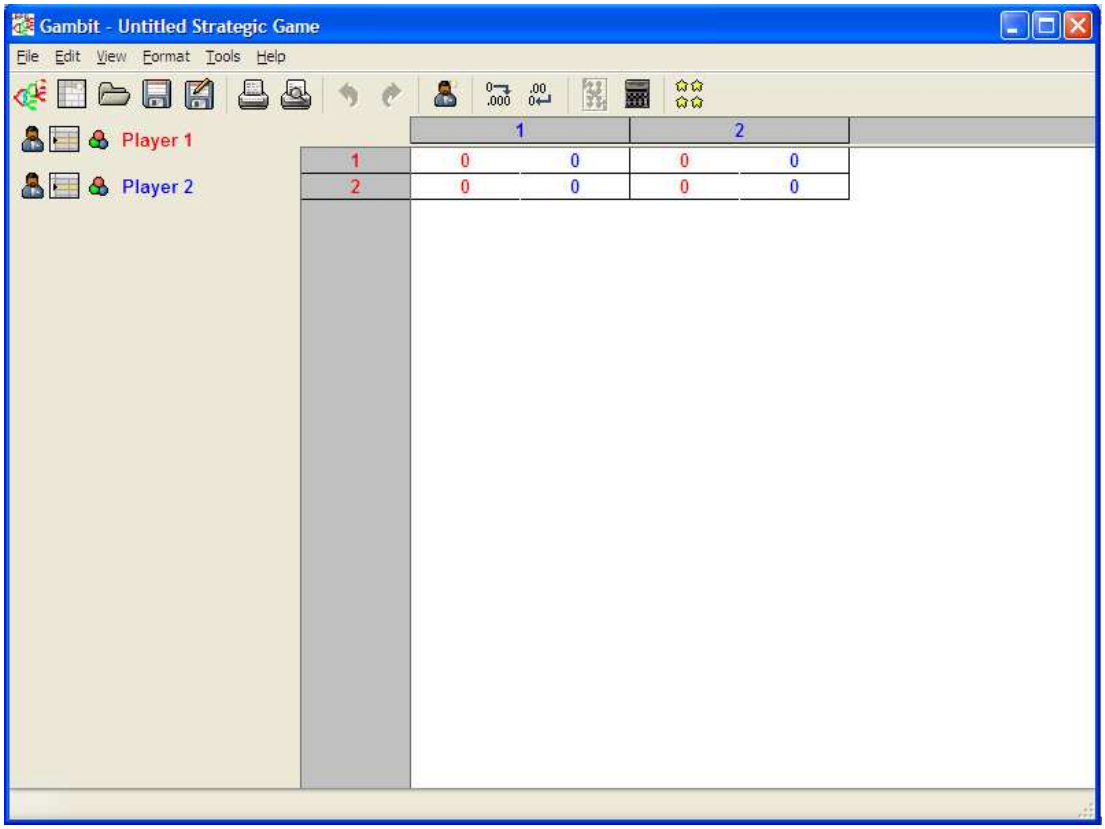


طريقة اخرى لتصميم مباراة بالصيغة الإستراتيجية

وذلك بالضغط على أيقونة *Create a new strategic game* كما هو موضح بالشكل



فيظهر نفس الجدول السابق

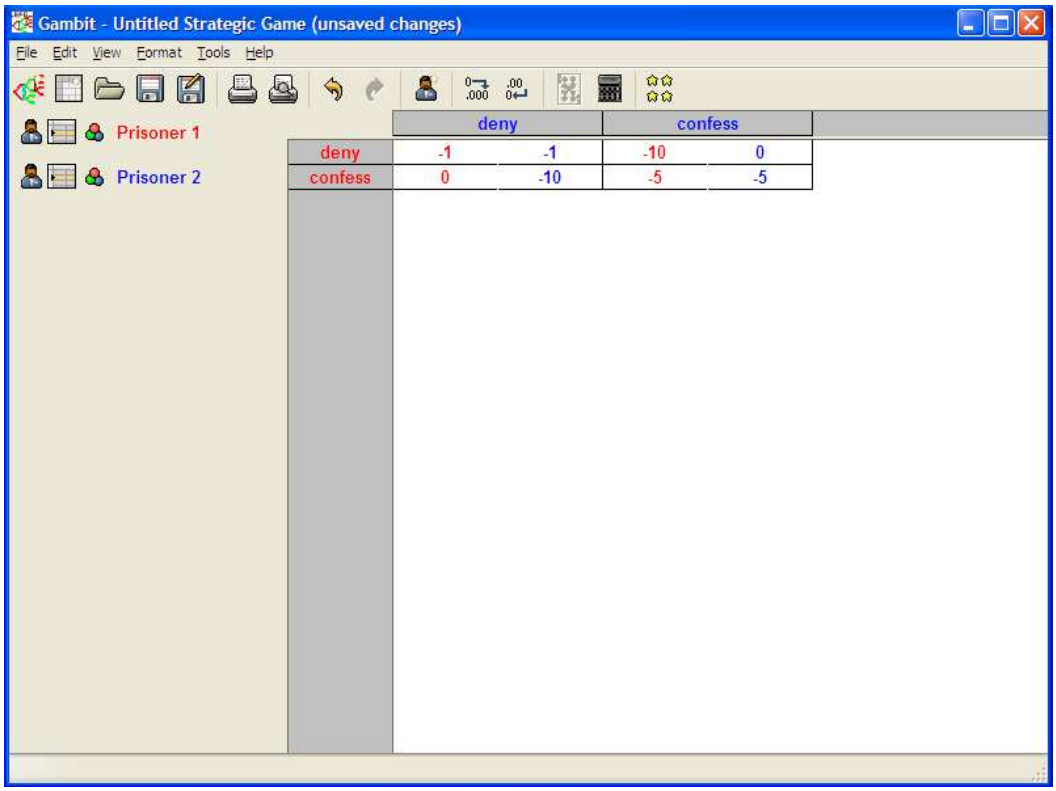


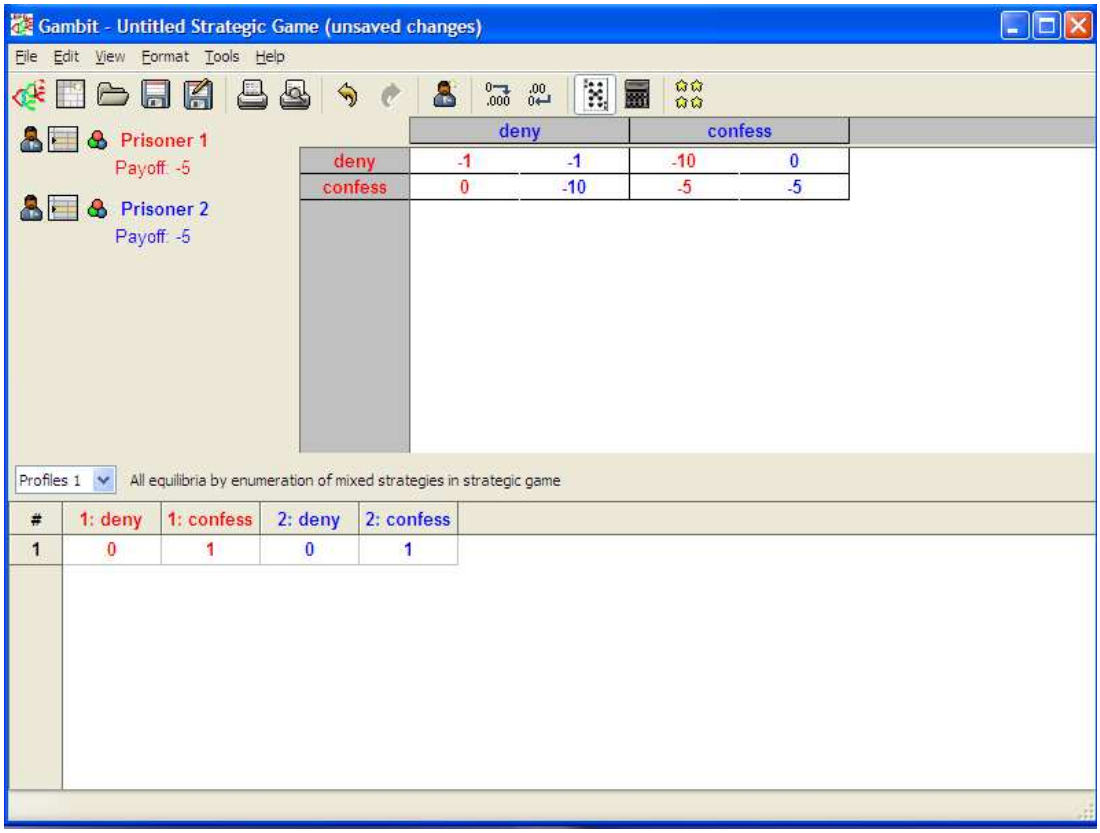
مثال : حيرة المساجين *Prisoner's Dilemma*

تقوم الشرطة بالتحقيق مع إثنان من المشتبهين على إنفراد بدون علم احدهما بما يجري مع الآخر والذين قاموا بجريمة كبيرة. المشتبه بهما لديهم خيارين إما يعترفا أو ينكرا. إذا أنكر كليهما فسوف يسجنا بسبب جنحة سابقة بسيطة. إذا أعترف أحدهما فسوف يدانا كليهما بالسجن. حيرة السجناء تأتي من: إذا أعترف أحدهما وأنكر الآخر فإن المعترف يسجن مدة بسيطة لتعاونه مع الشرطة بينما الآخر يسجن مدة أطول. المصفوفة الثنائية للعائدات هي كما يلي:

		$prisoner2$	
		deny	*confess*
$prisoner1$	*deny*	$-1,-1$	$-10,0$
	confess	$0,-10$	$-5,-5$

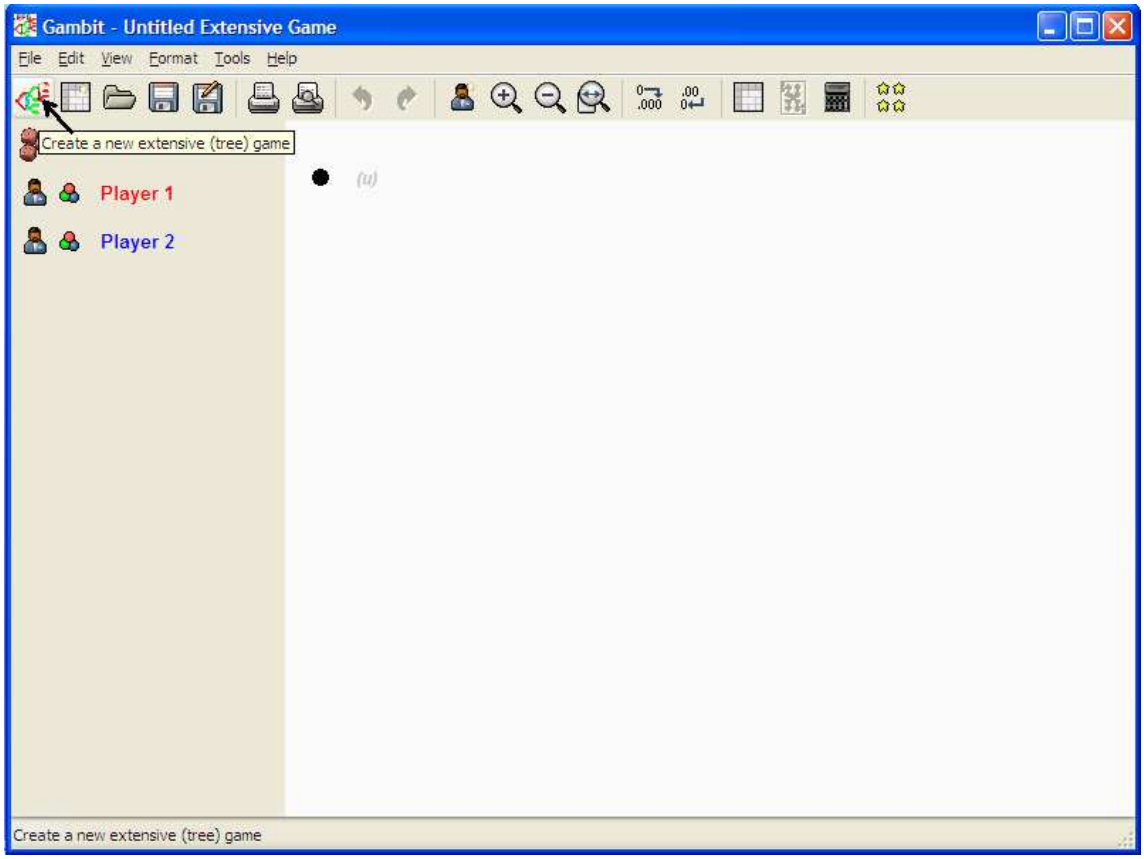
الحل بواسطة *Gambit*



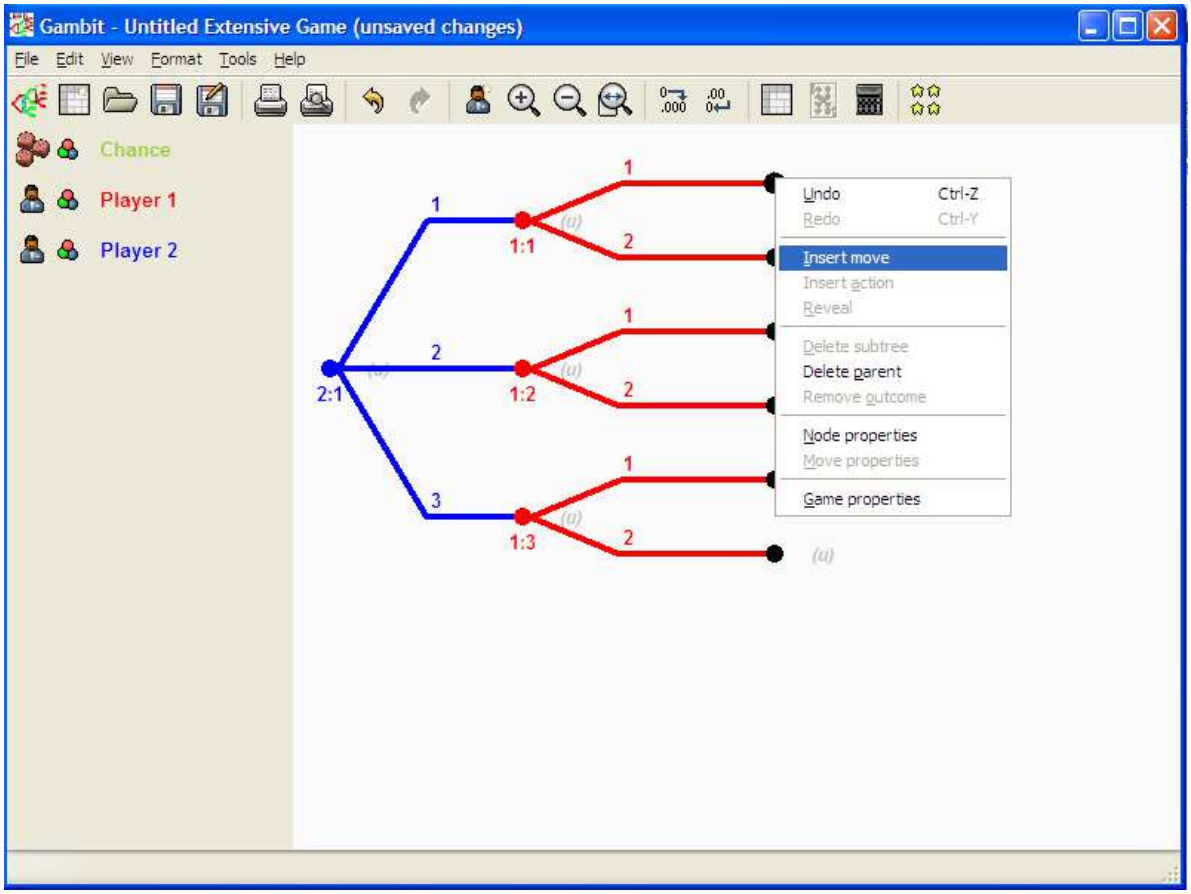


تمرين: فسر النتائج.

تصميم مباراة بصيغ الإنتشار ***Extensive Forms***



بالضغط على العقدة (الظاهرة باللون الأسود) بالفارة اليمنى يظهر *Insert move*



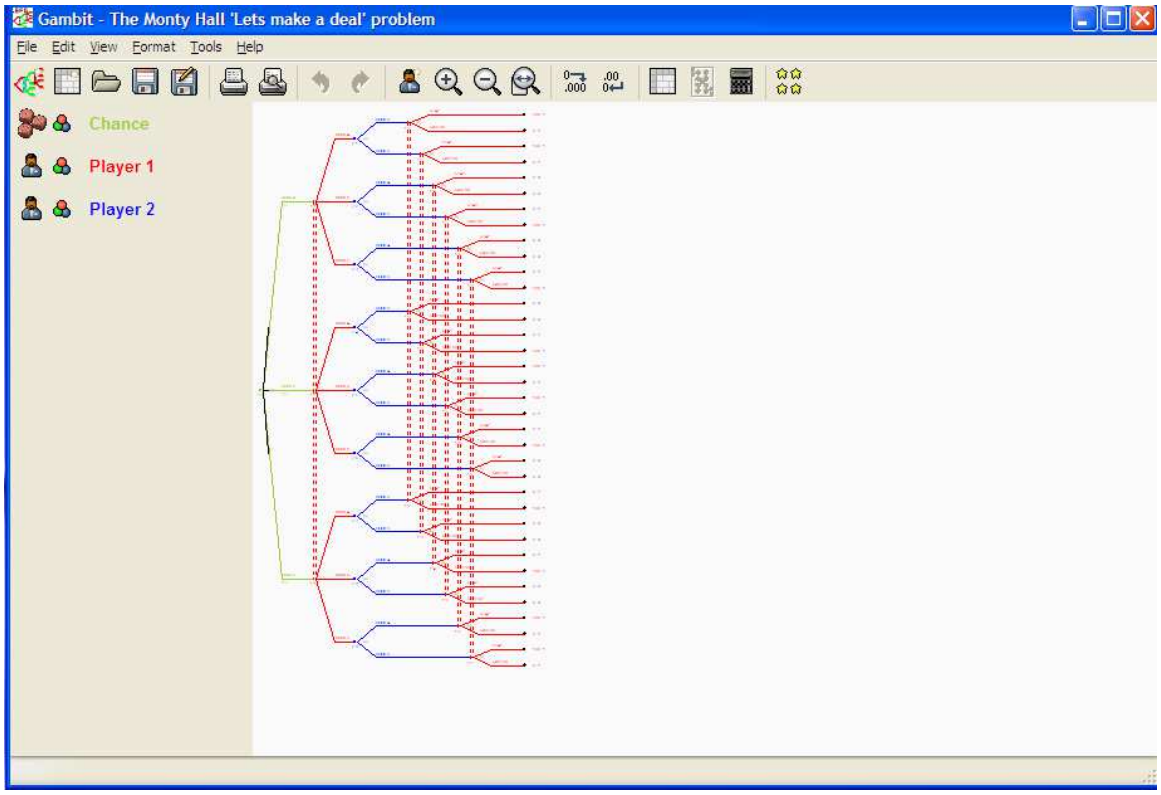
فتظهر نافذة الخيارات

مثال على مباراة بصيغة الإنتشار

لنفترض انك أشتركت في مسابقة تلفزيونية وعرض عليك مقدم البرنامج إختيار واحد من ثلاثة أبواب خلف أحدها سيارة والبابين الآخرين خلفهما جوائز ترضية (مثلا جهاز تلفزيون). تقوم بإختيار باب لنقل باب رقم 1 وبدون فتح هذا الباب يقوم مقدم البرنامج الذي يعرف مايوجد خلف الأبواب الاخرى بفتح باب وليكن باب رقم 3 مثلا يوجد خلفه جائزة ترضية ثم يطلب منك قبل فتح الباب الذي اخترته مسبقا بإمكانية المكوث على إختيارك أو إختيار الباب الآخر (الباب رقم 2 في هذه الحالة). ماذا ستفعلى تغير رأيك أم تبقى على إختيارك الأول؟

الشكل التالى يعطي المشكلة بشكل صيغة إنتشار.

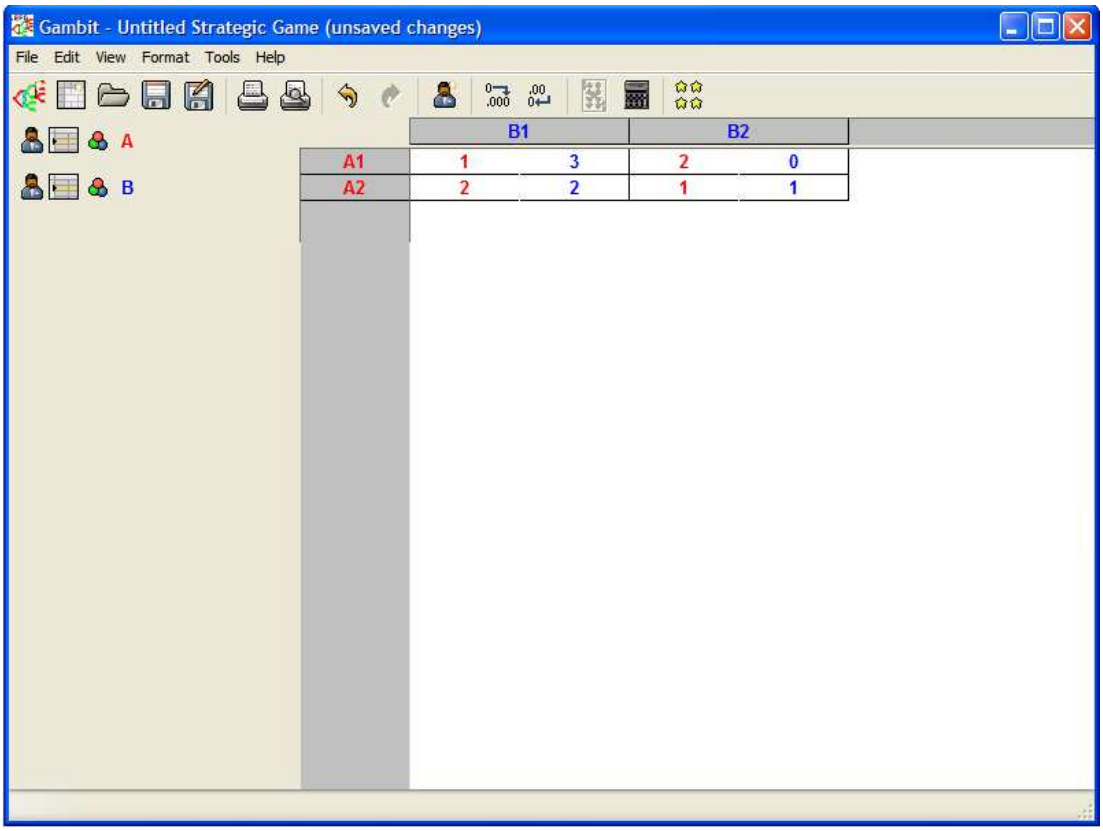
ملاحظة: سوف يتم شرح وتوضيح الشكل في المحاضرة

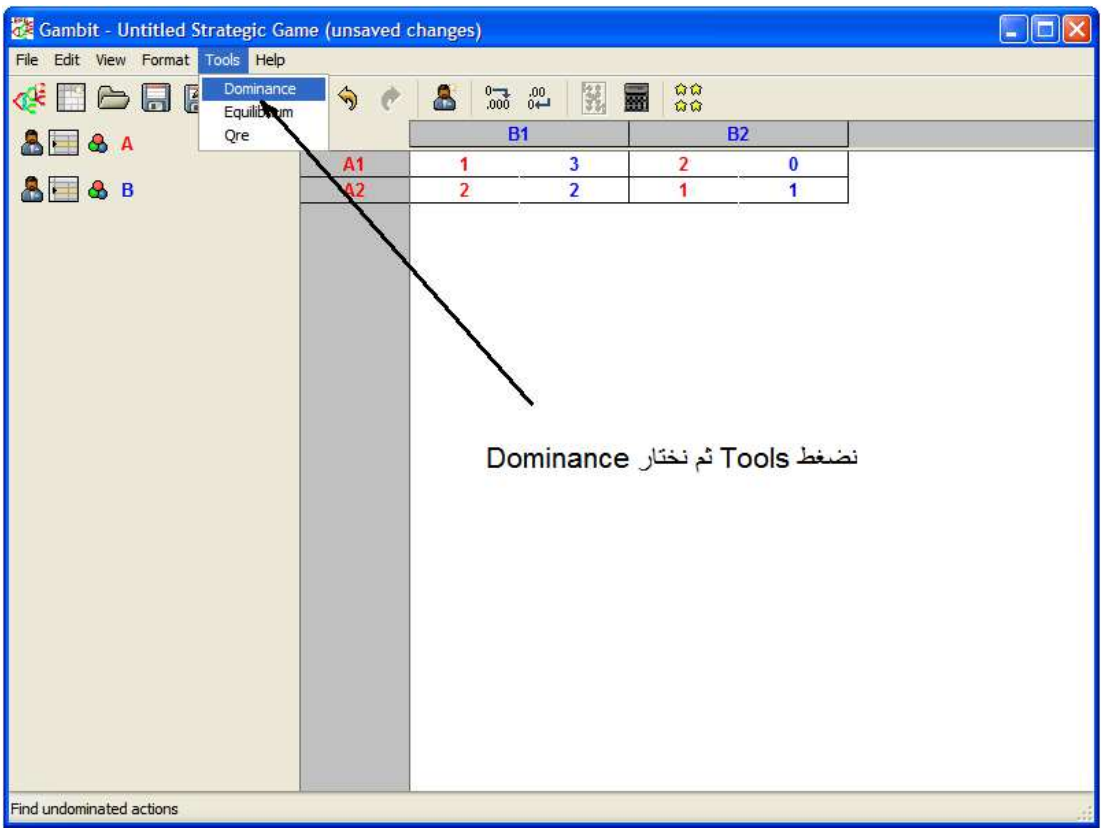


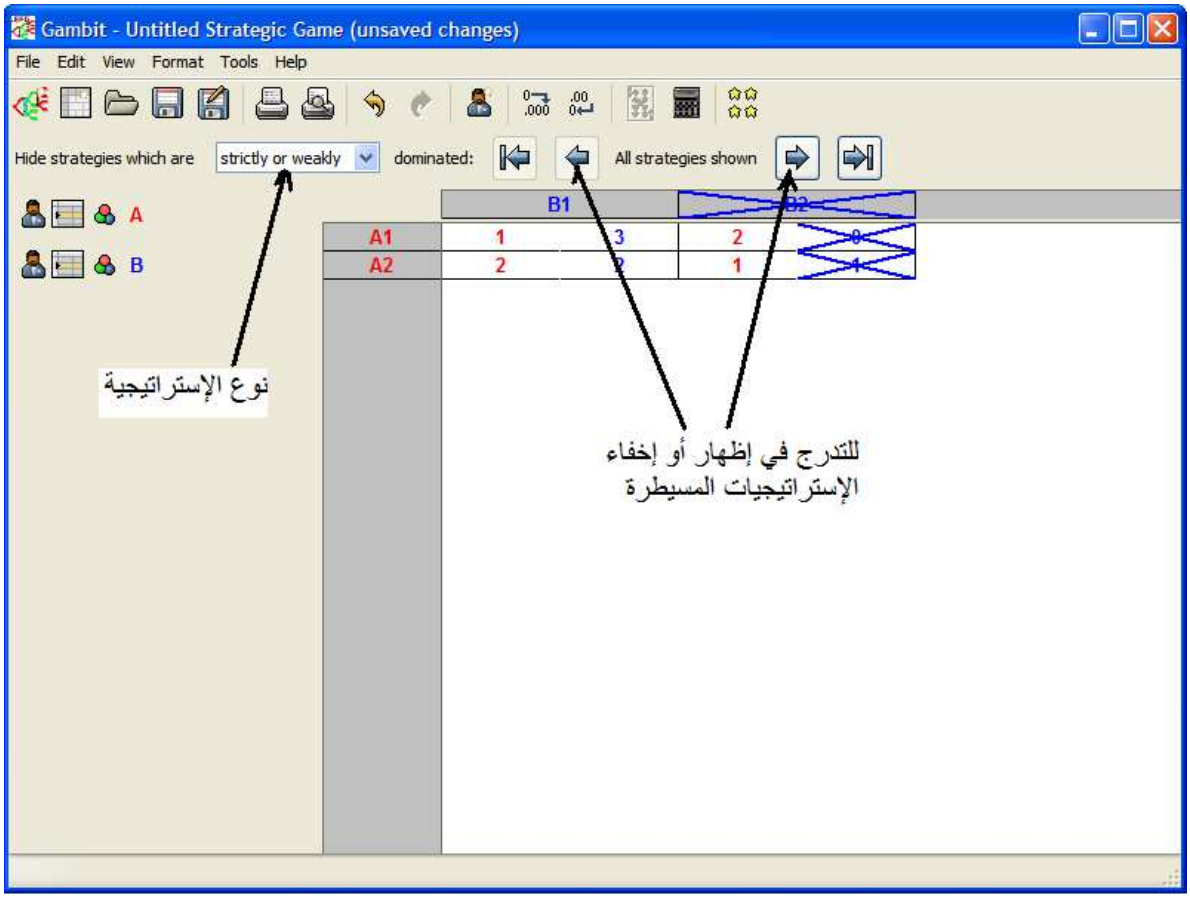
توازن السيطرة المتكررة *Iterated-dominance Equilibrium*

وهو التوازن الذي ينتج من إلغاء الإستراتيجيات القوية أو الضعيفة حتى يتبقى إثنان من الإستراتيجيات.

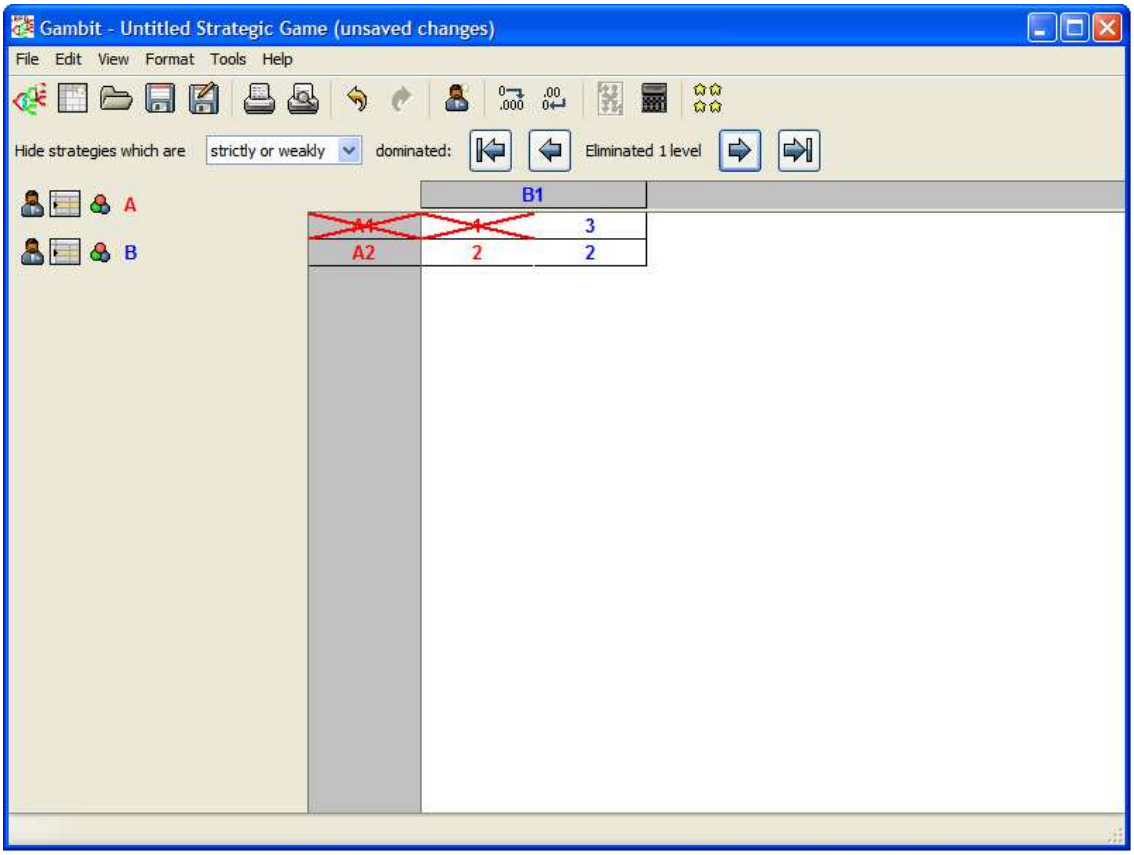
مثال على توازن السيطرة المتكررة



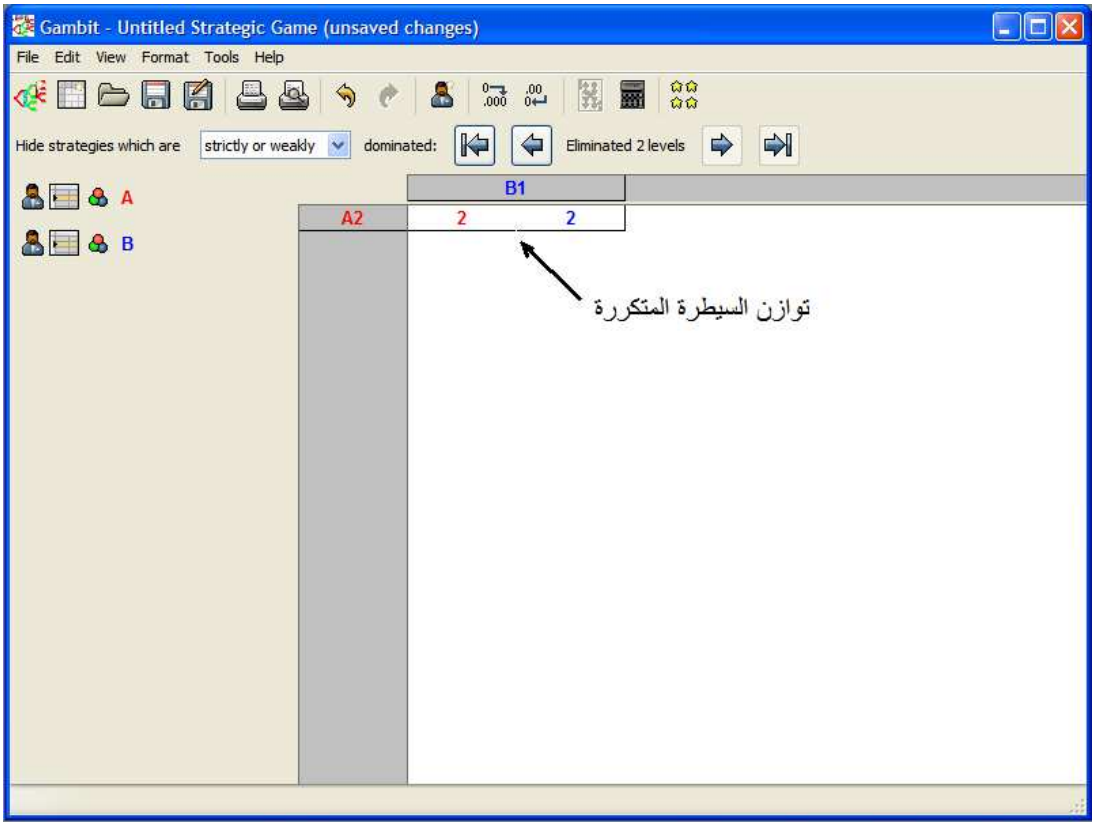

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Dominance
Equilibrium
Qre
A
B
B1
B2
A1
A2
1 3 2 0
2 2 1 1
نضغط Tools ثم نختار Dominance
Find undominated actions


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are
strictly or weakly
dominated:
All strategies shown
A
B
B1
B2
A1
A2
1
3
2
0
2
2
1
1
نوع الإستراتيجية
للتدرج في إظهار أو إخفاء
الإستراتيجيات المسيطرة

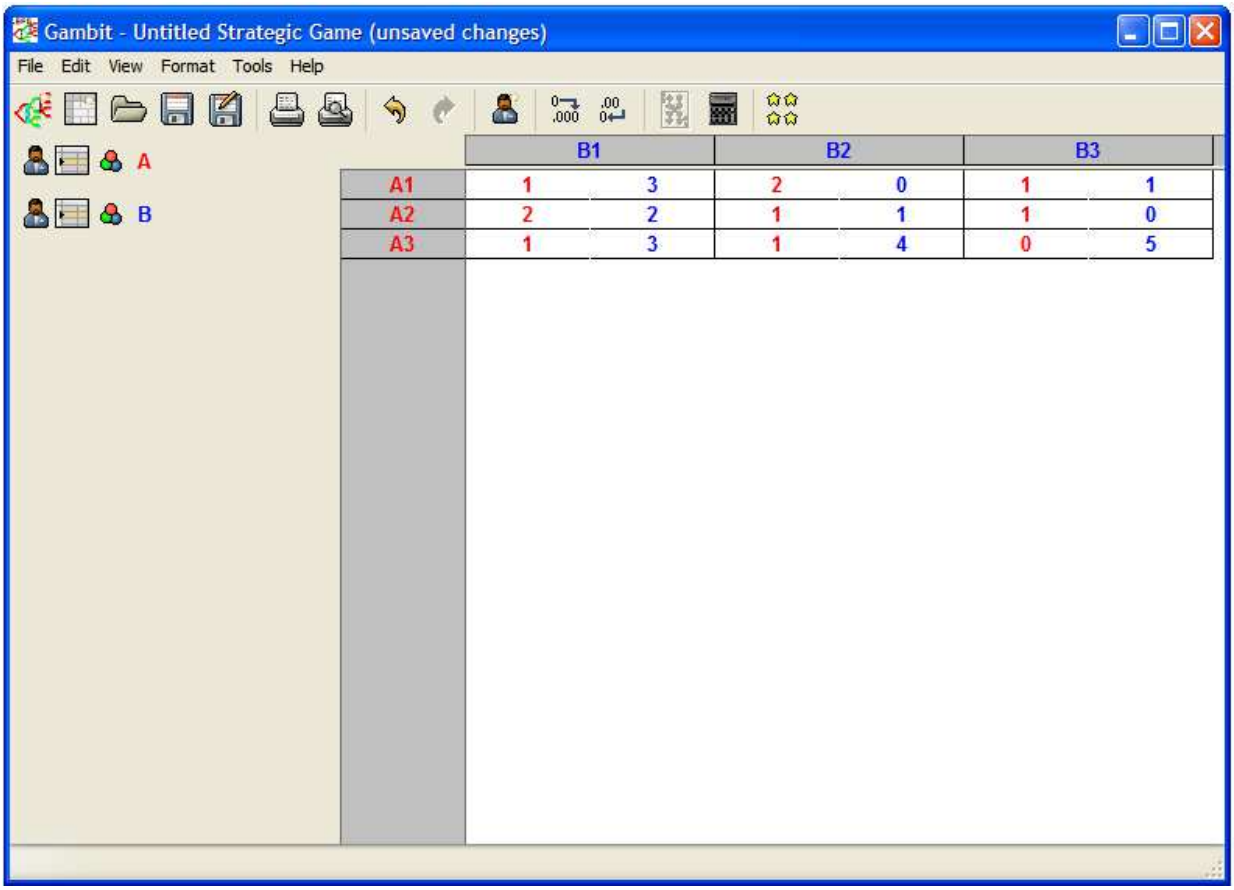
بالضغط على ينتج



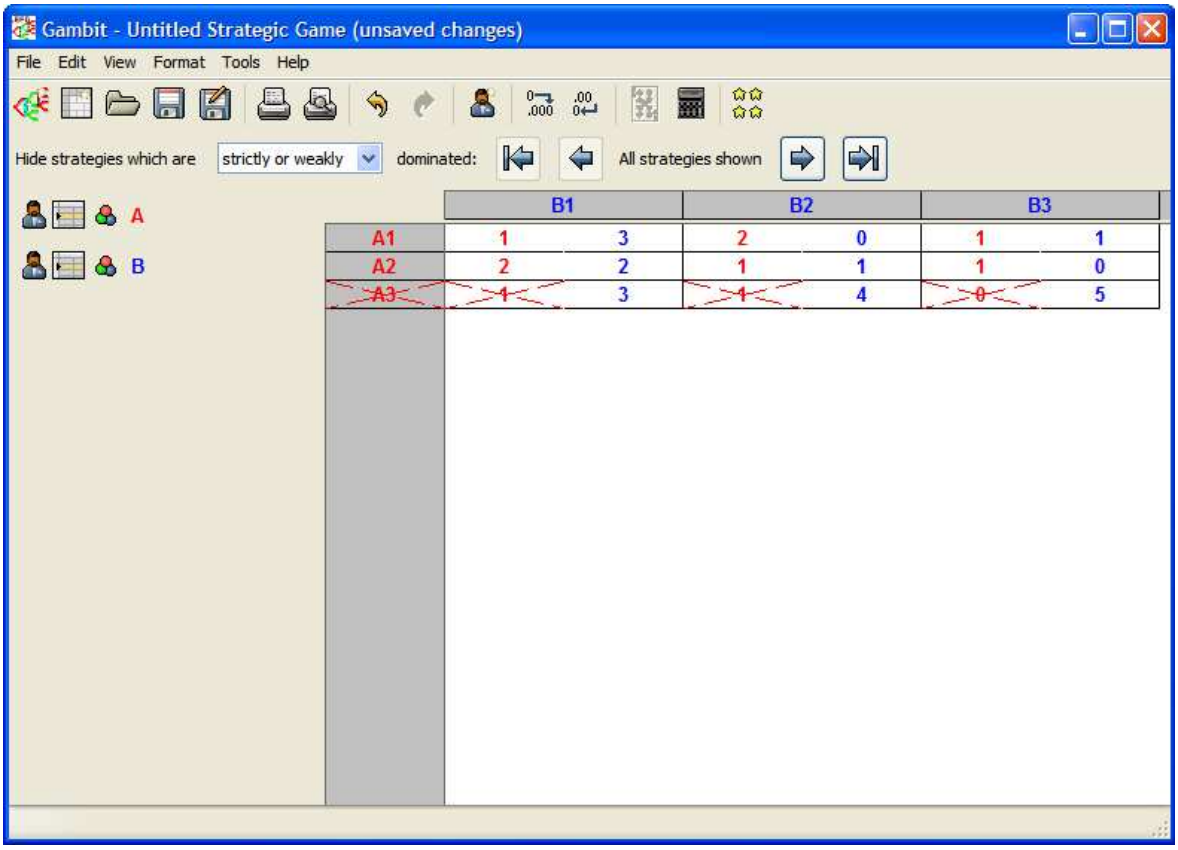
بالضغط على مرة اخرى ينتج



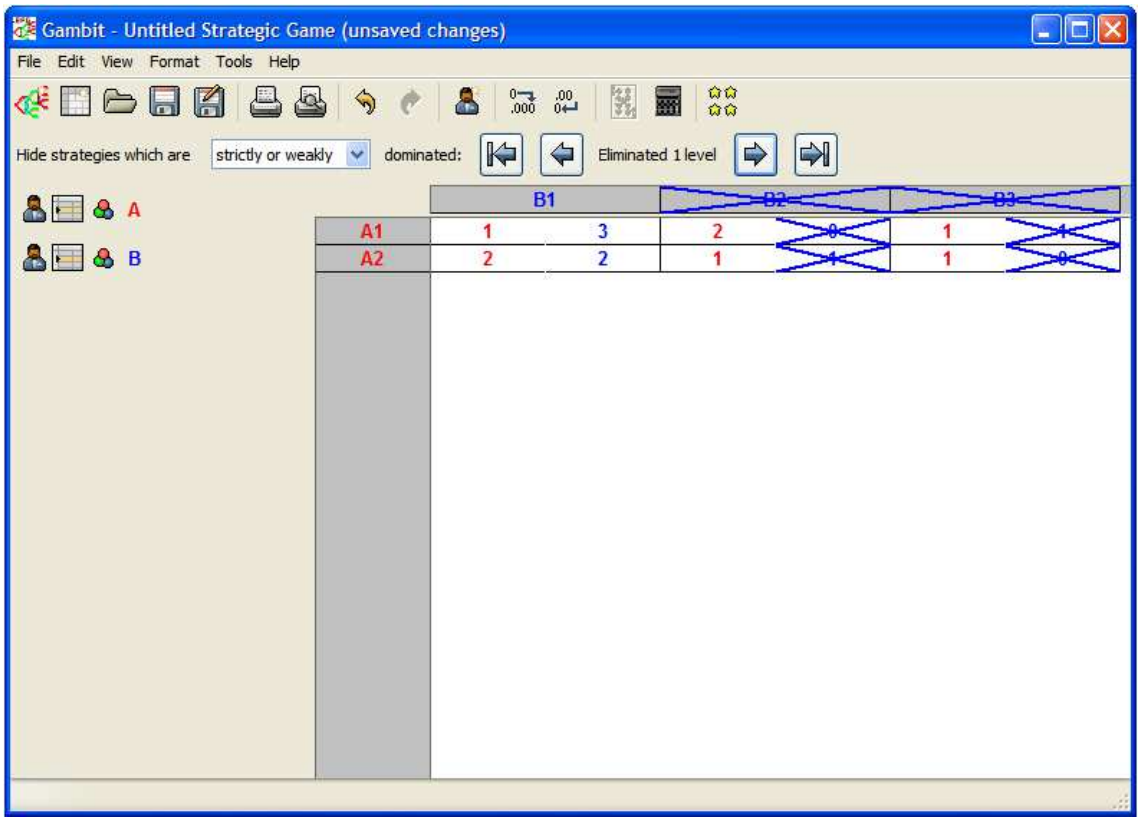
مثال آخر على توازن السيطرة المتكررة

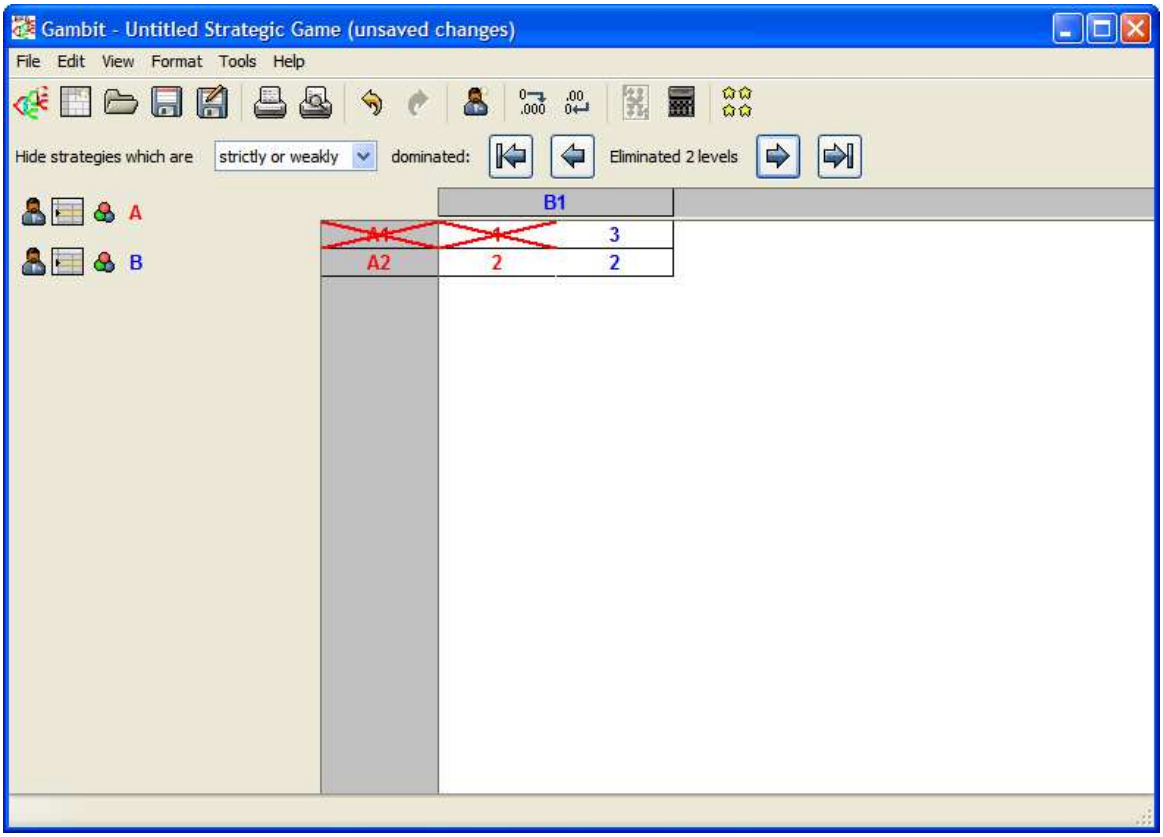


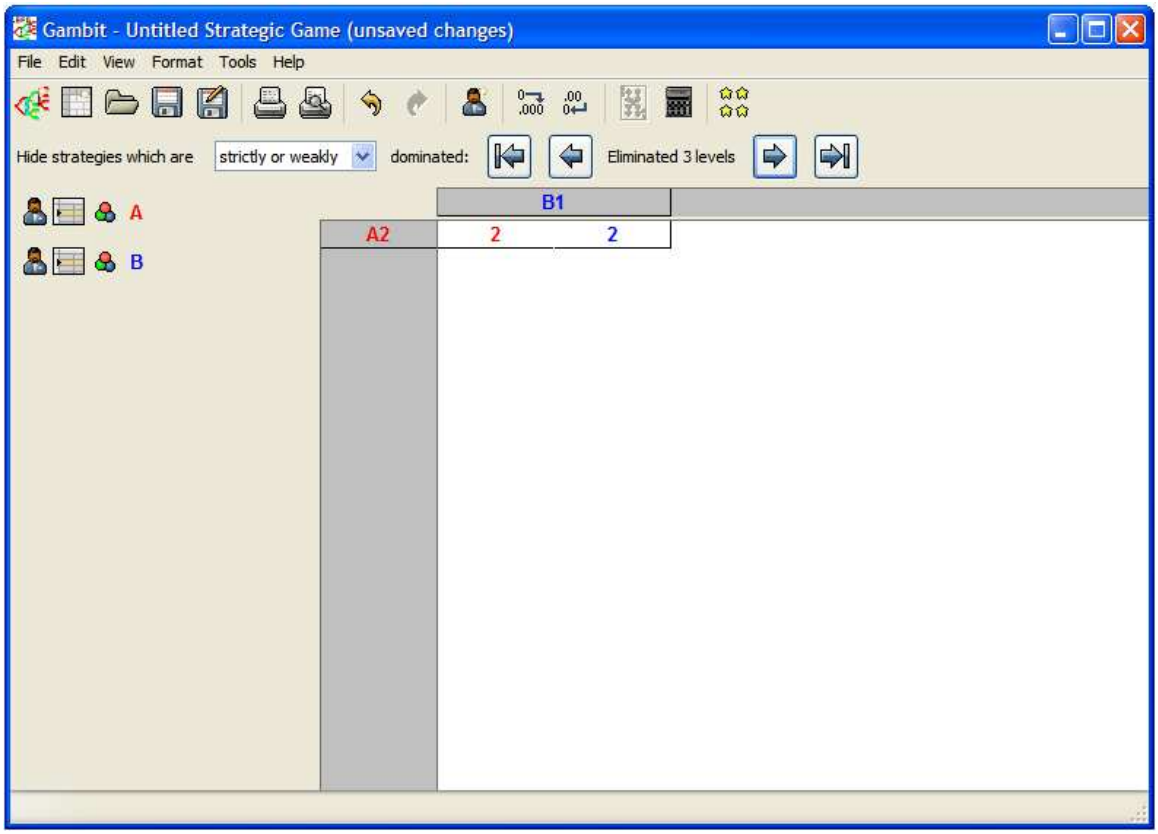
التكرار الأول



التكرار الثاني

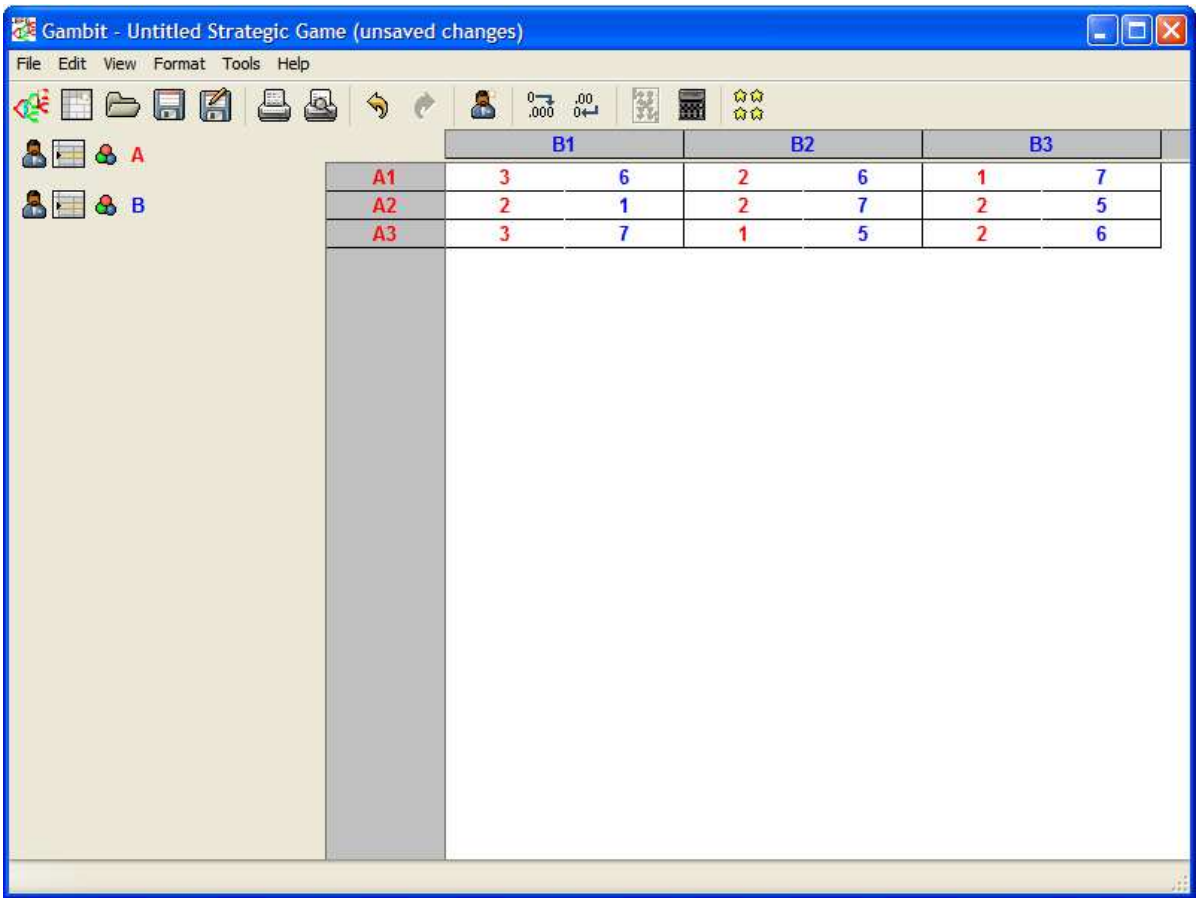



Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly or weakly dominated:
Eliminated 2 levels
A
B
B1
A1
1
3
A2
2
2

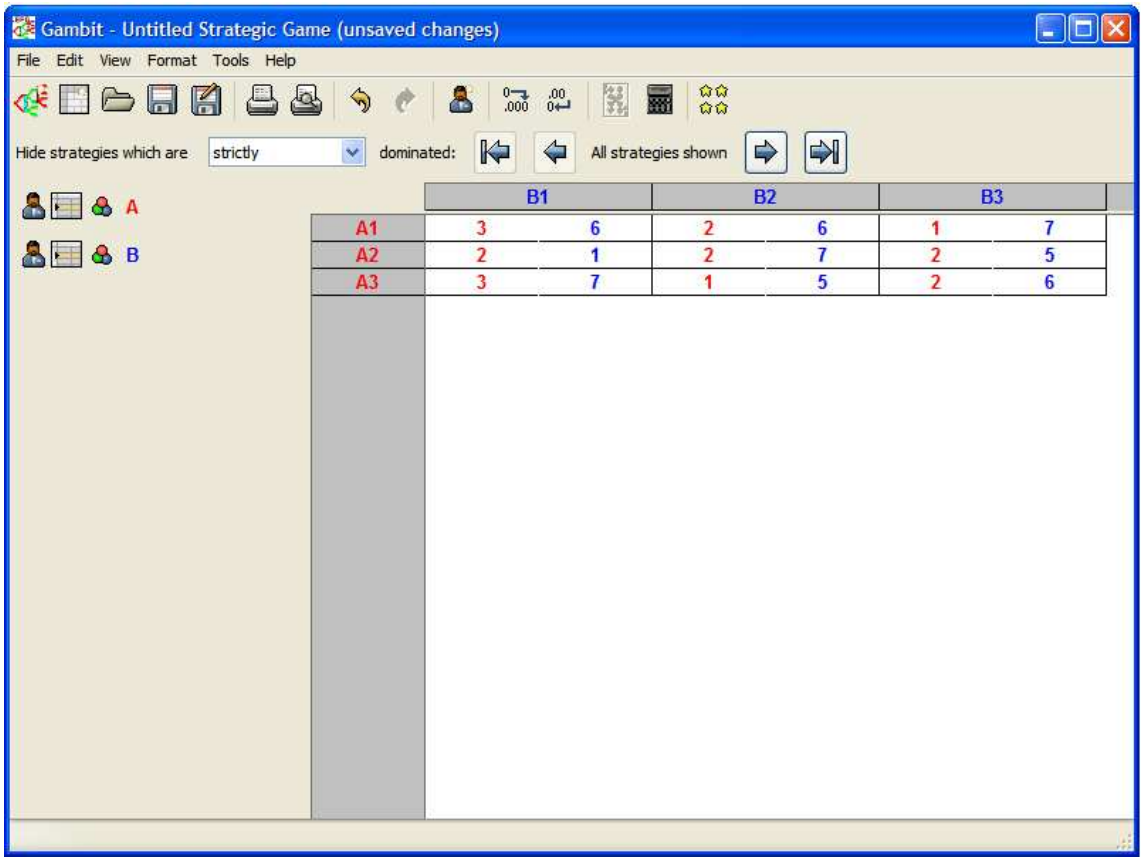

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are
strictly or weakly
dominated:
Eliminated 3 levels
A
B
B1
A2
2
2

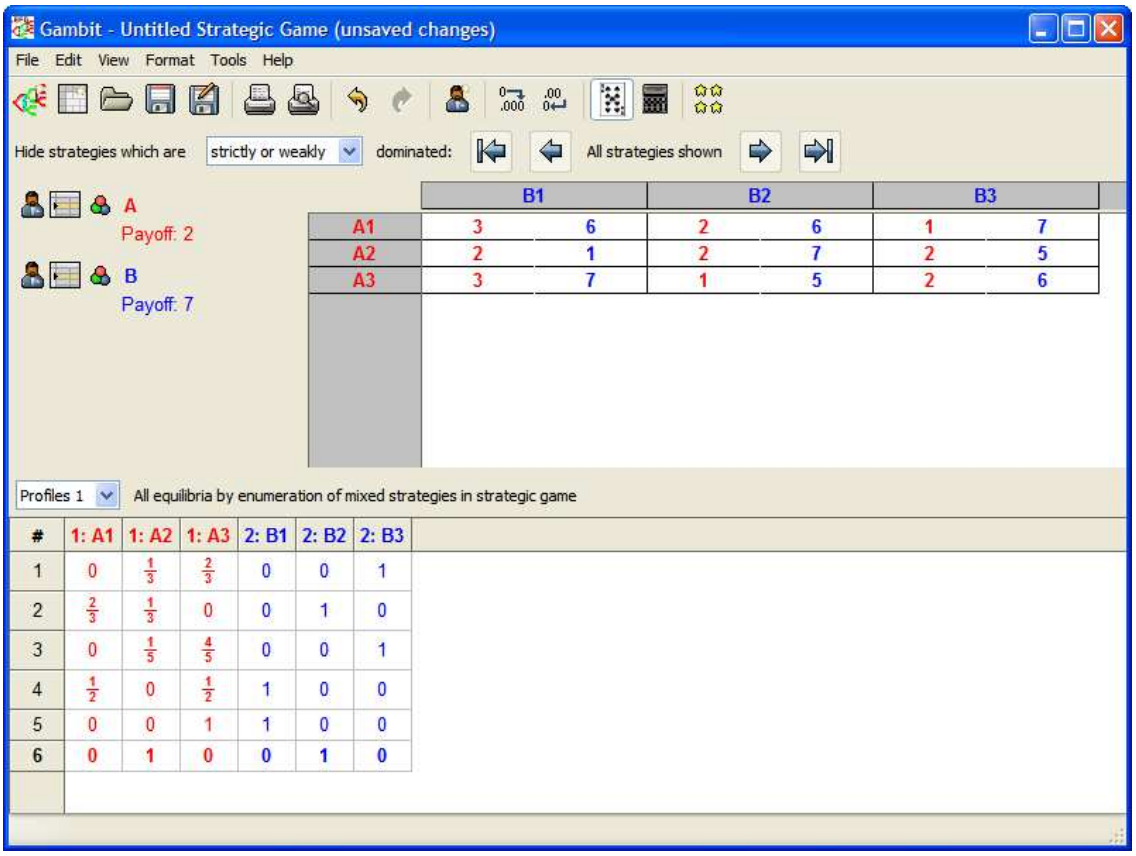
التكرار الضعيف ***Weak Iteration***

المباراة



لايوجد إستراتيجيات مسيطرة مطلقا (قوية)


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated:
All strategies shown
A
B
B1 B2 B3
A1 3 6 2 6 1 7
A2 2 1 2 7 2 5
A3 3 7 1 5 2 6



تمارين:

أوجد جميع نقاط التوازن تكراريا ومن ثم اوجد الحل وناقش النتائج للتالي:

(1

	B1		B2		B3	
A1	0	4	4	0	5	3
A2	4	0	0	4	5	3
A3	3	5	3	5	6	6

(2

	1		2		3	
1	10	10	0	0	-1	15
2	-12	1	8	8	-1	-1
3	15	1	8	-1	0	0

(3

	1		2		3	
1	50	1	1	35	1	1
2	1	35	50	1	1	1
3	1	1	1	1	10	10

فعالية باريتو *Pareto Efficiency*

تعتبر نتيجة مباراة فعالة بمقياس باريتو إذا كان ليس بالإمكان تحسين عائد لاعب بدون تقليل عائد منافسيه.

سيطرة باريتو *Pareto Domination*

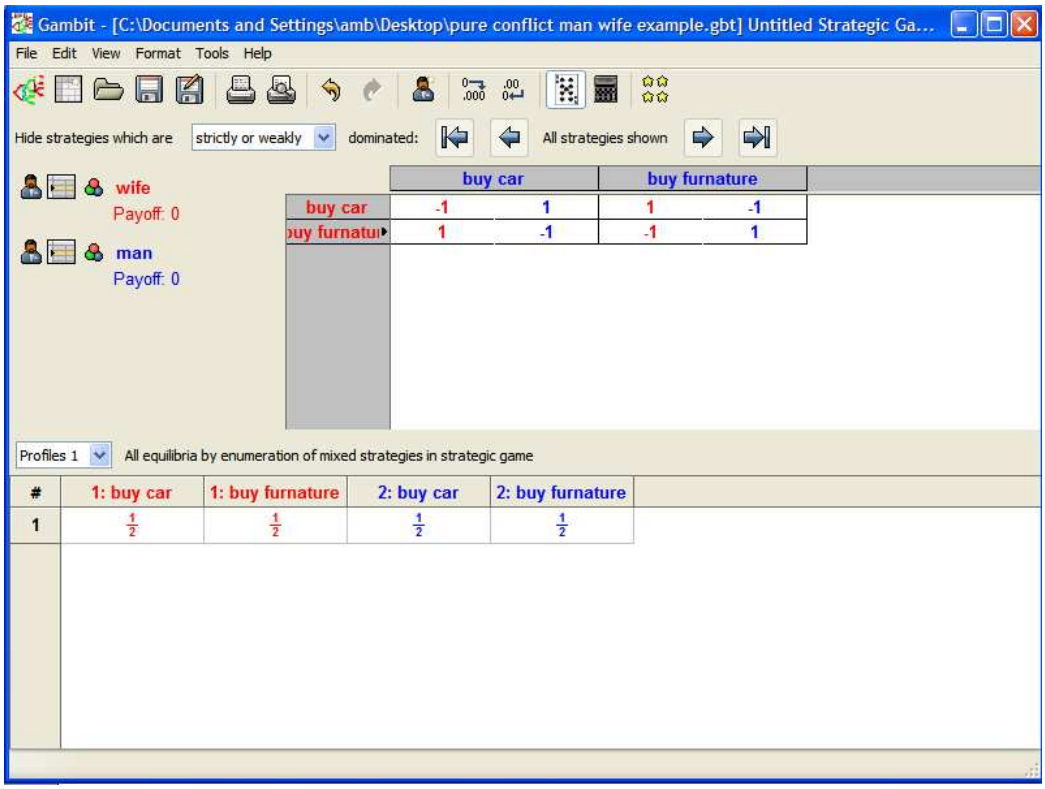
(نتيجة 1) لمباراة تسيطر سيطرة باريتو أو متفوقة بمعنى بوريتو على (نتيجة 2) إذا كانت العائدات للاعب أعلى ولا أي منها أقل في (النتيجة 1).

مثال: مباراة التعارض البحت *pure conflict*

كسب زوجان مبلغ من المال يكفي للرجل لكي يشتري سيارة أو الزوجة لتجديد أثاث المنزل. مصفوفة العائدات لكل منهم:

		man			
		buy car		buy furnature	
wife	buy car	-1	1	1	-1
	buy furnatur	1	-1	-1	1

لا أحد يكسب! لماذا؟


Gambit - [C:\Documents and Settings\amb\Desktop\pure conflict man wife example.gbt] Untitled Strategic Ga...
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly or weakly dominated: All strategies shown
wife
Payoff: 0
man
Payoff: 0
buy car
buy furnature
buy car -1 1 1 -1
buy furnatur 1 -1 -1 1
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: buy car 1: buy furnature 2: buy car 2: buy furnature
1 1/2 1/2 1/2 1/2

مثال 3-1 في كتاب البلخي

يقــوم كل من اللاعبين A و B بوضع 1 $ في وعاء ليبــدءوا بعــدها اللعبــة التالية . توجد بطاقتان أحدهما تحمل الرمز H والأخرى تحمل الرمز L موضــوعتان على طاولة بطريقة تخفي رمز كل منهما . يقوم اللاعب A باختيار إحدى البطــاقتين ، وبعد النظر إليها يقوم بوضع إما 2 $ أو 4 $ في الوعاء . أما خيارات اللاعب B فهي إما أن ينسحب ويخسر الدولار الذي وضعه بداية في الوعاء أو أنه يضع نفس المبلــغ الذي وضعه اللاعب A في الوعاء (أي إما 2 $ أو 4 $) وينظر إلى البطاقــة التــي سحبها A . فإذا كانت البطاقة هي التي تحمل الرمز H فإن اللاعب B يــربح كامــل المبلغ المتجمع في الوعاء و إلا فإن اللاعب A يربح هذا المبلغ .

فلرسم شجرة المباراة في مثل هذه اللعبة نبدأ بعقدة تسمى عــادة عقــدة الحــظ (chance node) يتفرع عنها الحادثين H (الذي يقابل أن تكون البطاقة المسحوبة هي التي تحمل الرمز H) والحادث L (وهو الذي يقابل كون البطاقة المــسحوبة تحمــل الرمز L) . وكما نلاحظ فإن احتمال كل من هذين الحادثين هو $\frac{1}{2}$. وينظر إلى عقدة الحظ هذه كما لو أنها لاعب ثالث هو الطبيعة Nature وبموجب معطيات اللعبة وبعــد وقوع أحد الحادثين H أو L فإن أمام اللاعبين A و B الاستراتيجيات الموضحة أدناه :

A_1 : أن يضع 2 $ إذا كانت البطاقة H و 2 $ إذا كانت البطاقة L .

A_2 : أن يضع 2 $ إذا كانت البطاقة H و 4 $ إذا كانت البطاقة L .

A_3 : أن يضع 4 $ إذا كانت البطاقة H و 2 $ إذا كانت البطاقة L .

A_4 : أن يضع 4 $ إذا كانت البطاقة H و 4 $ إذا كانت البطاقة L .

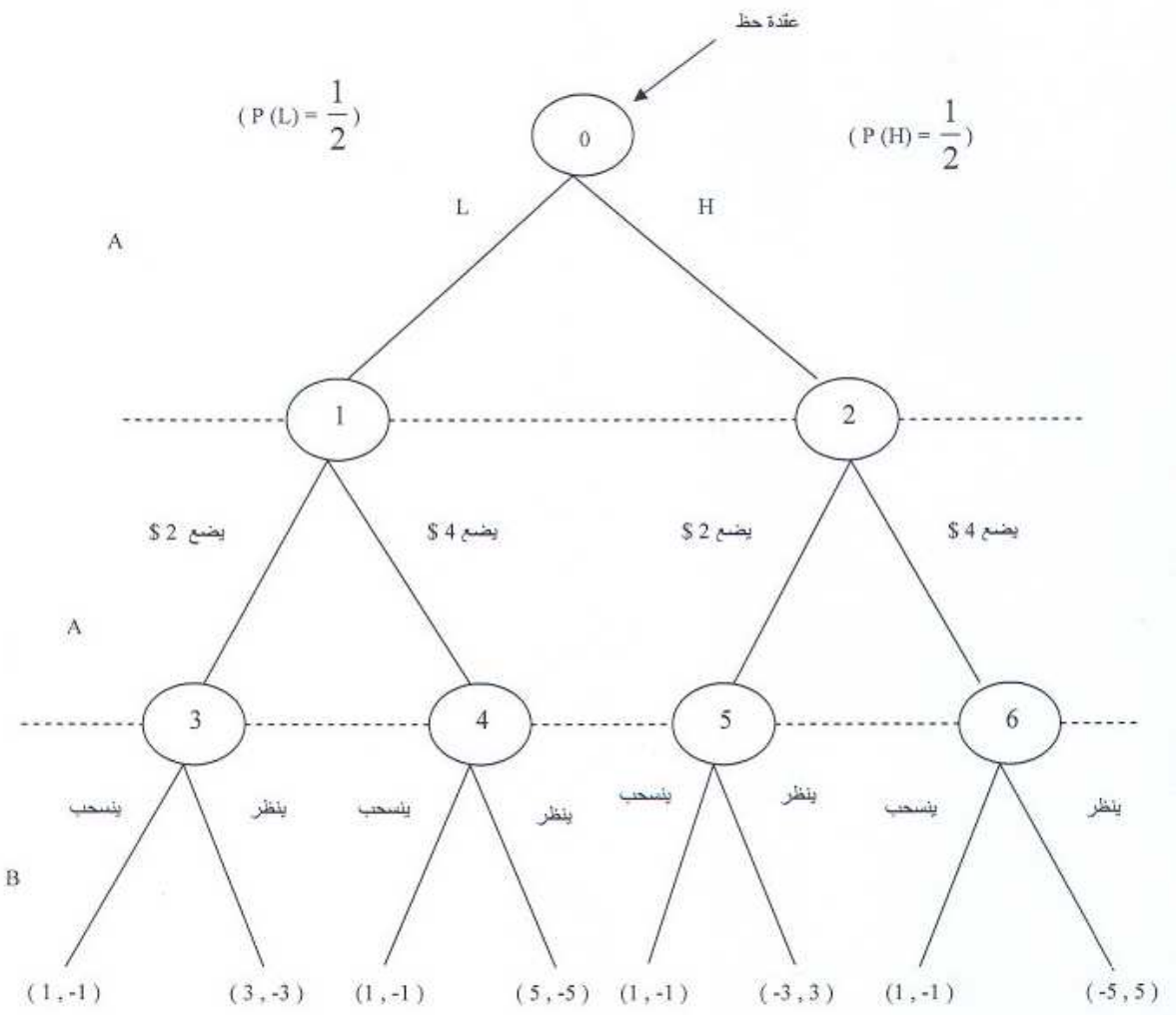
B_1 : أن ينسحب إذا وضع A (2 $) وينسحب إذا وضع A (4 $) .

B_2 : أن ينسحب إذا وضع A (2 $) وينظر إذا وضع A (4 $) .

B_3 : أن ينسحب إذا وضع A (4 $) وينظر إذا وضع A (2 $) .

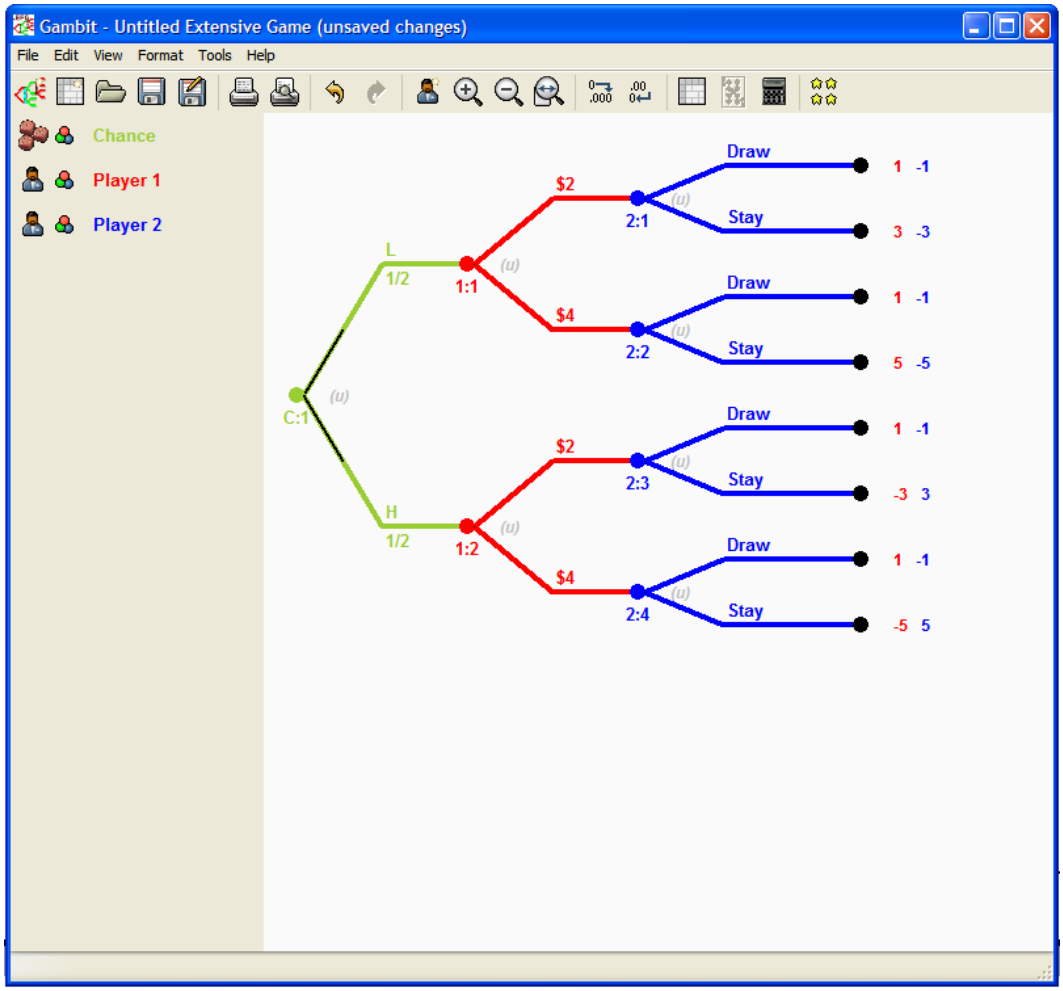
B_4 : أن ينظر إذا وضع A (2 $) وينظر إذا وضع A (4 $) .

وتكـــون شـــجرة المبـــاراة المقابلة في هـــذه الحـــالة على النحو المبين بالشكل

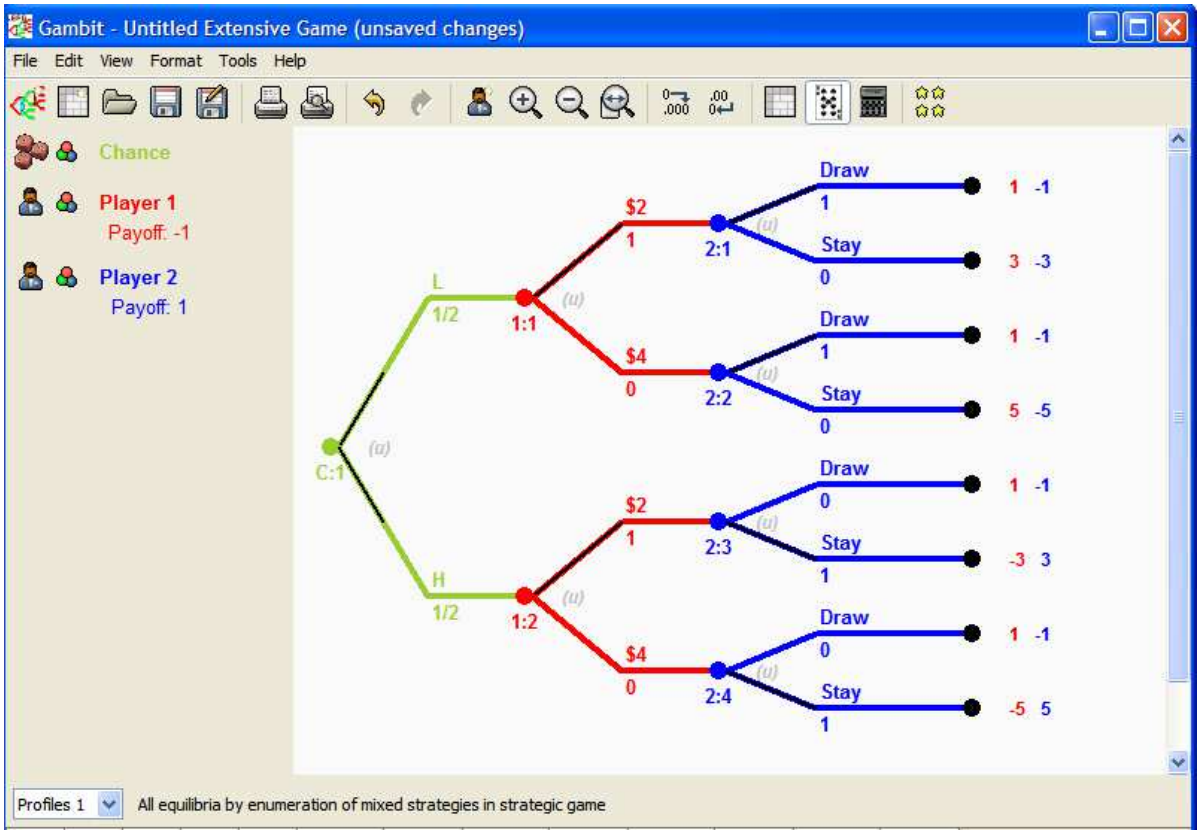


شكل (1 ــ 4) شجرة المباراة لمثال (1 ــ 3)

المثال السابق بإستخدام *Gambit*



الحل



بقية الحل : توازن ناش

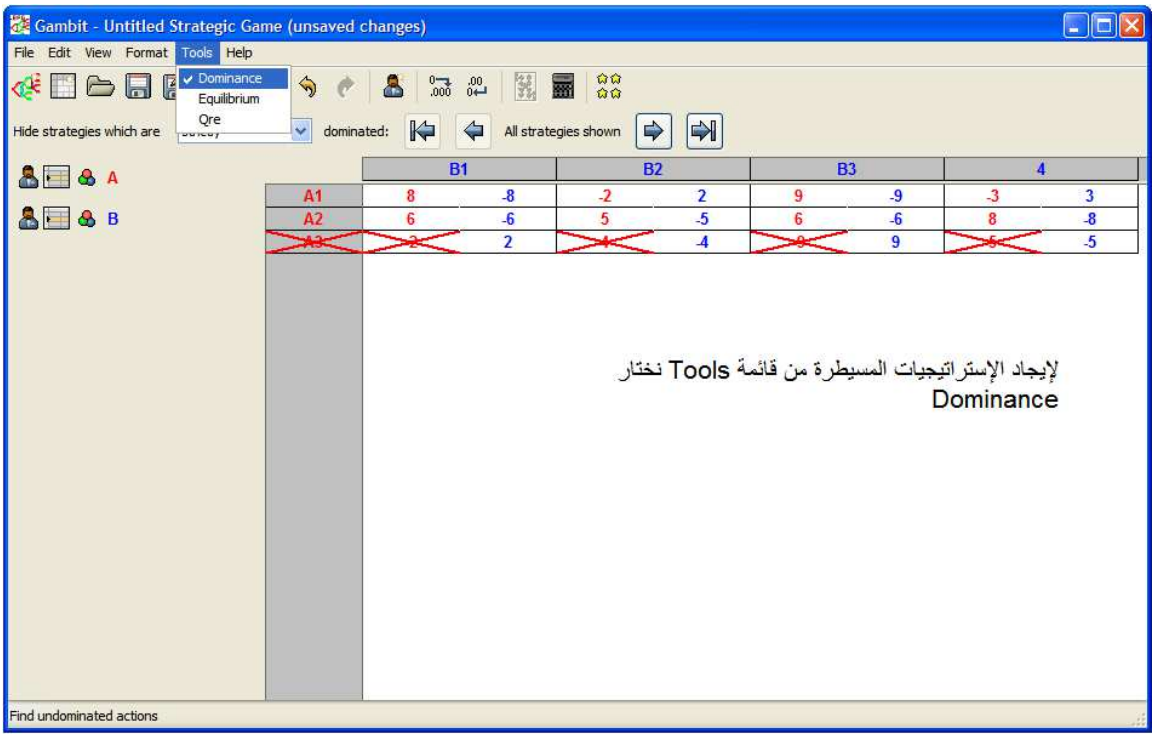
#	1: $2	1: $4	2: $2	2: $4	1: Draw	1: Stay	2: Draw	2: Stay	3: Draw	3: Stay	4: Draw	4: Stay
1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
4	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1

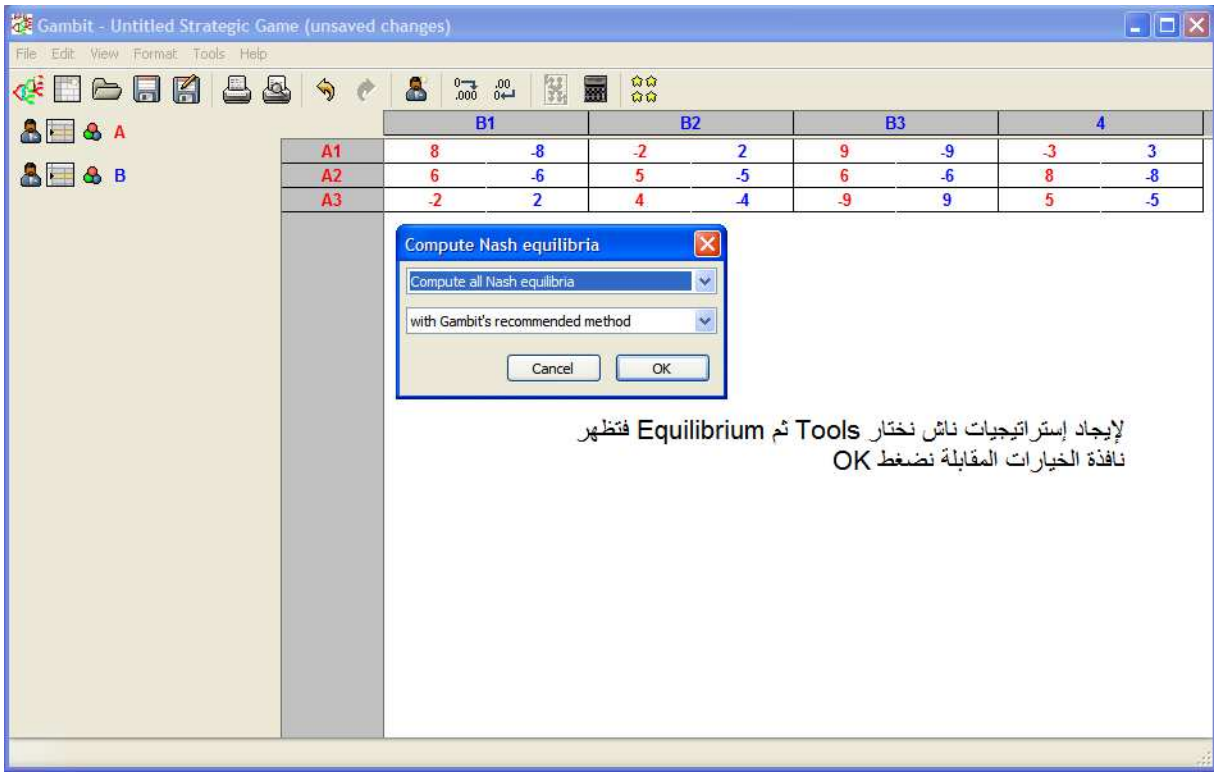
حل الأمثلة السابقة بإستخدام *Gambit*

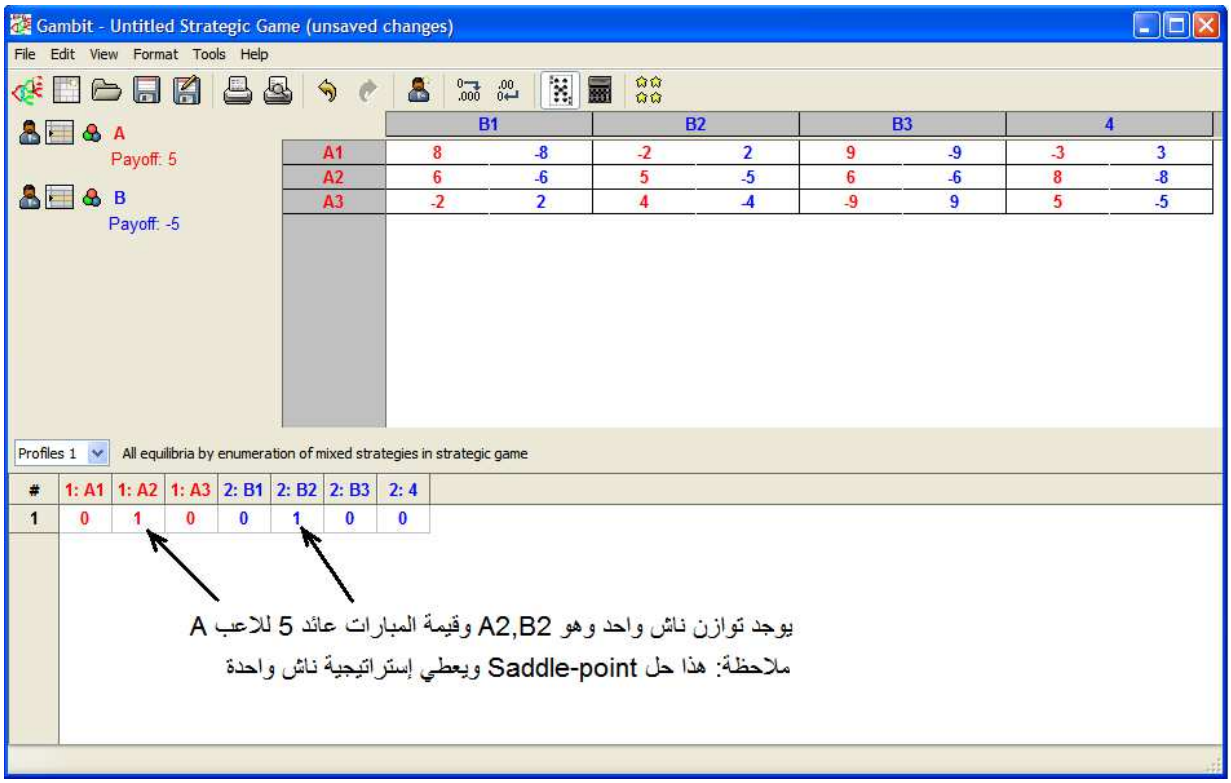
مثال: شركتين صناعة البان تنتج كل منهما نوع من اللبن. الشركة A تعلن بملصقات في الطرق A_1 وإعلانات تلفزيون A_2 وإعلانات صحف A_3. الشركة B تعلن بملصقات في الطرق B_1 وإعلانات تلفزيون B_2 وإعلانات صحف B_3 بالإضافة إلى نشرات توزع على المنازل B_4. نتيجة لكل جهد إعلاني فإن أي شركة تكسب من الشركة الاخرى نسبة من السوق. مصفوفة المدفوعات التالية تعطي نسبة السوق للشركة A:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

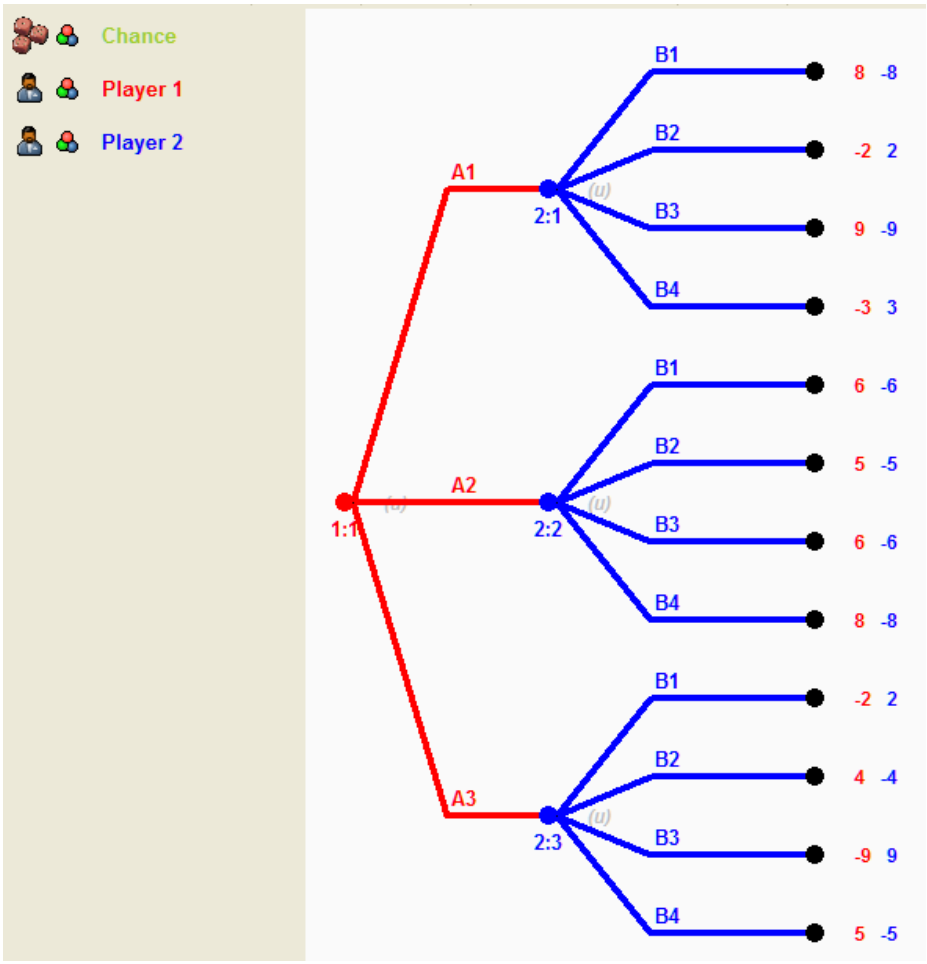
الحل:

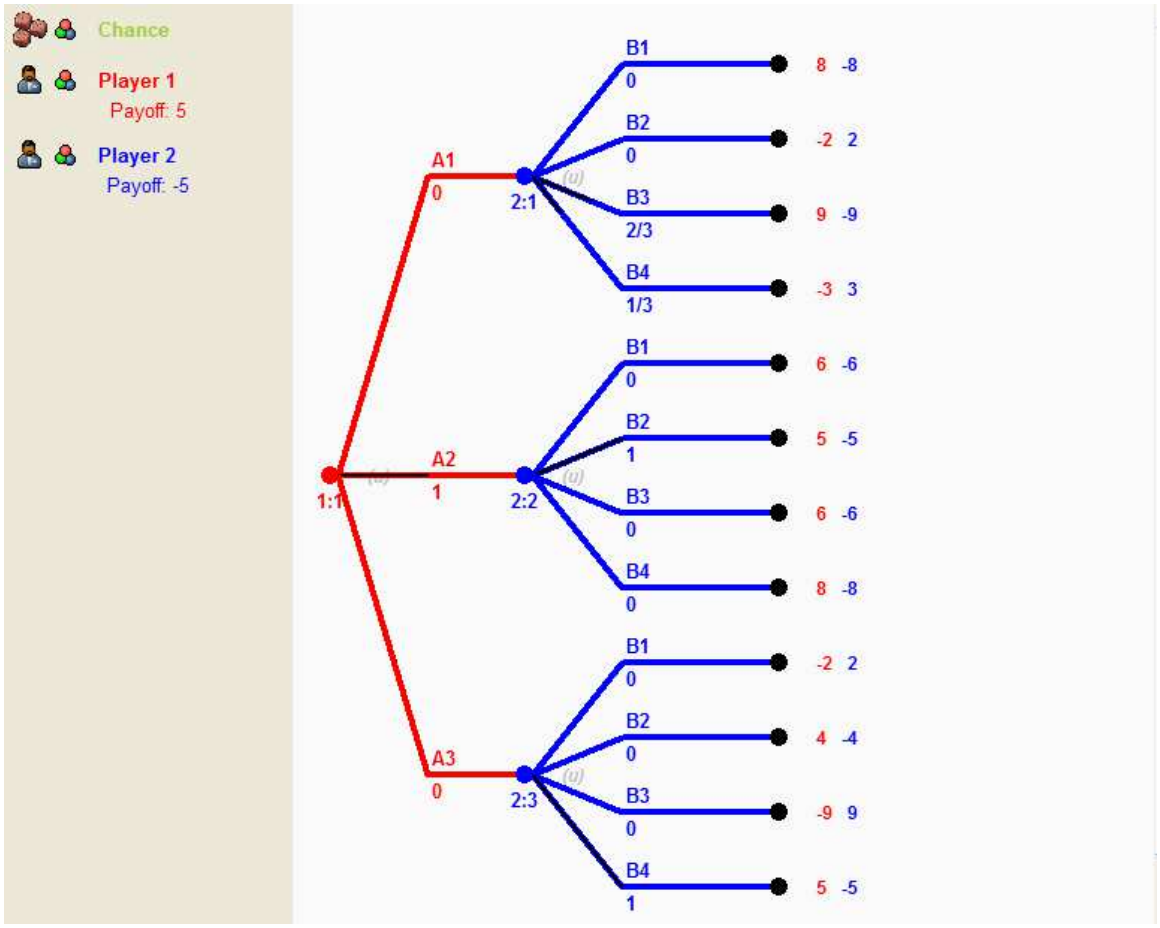

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Dominance
Equilibrium
Qre
Hide strategies which are dominated:
All strategies shown
A
B
B1 B2 B3 4
A1 8 -8 -2 2 9 -9 -3 3
A2 6 -6 5 -5 6 -6 8 -8
A3 -2 2 -4 -4 -9 9 -5 -5
لإيجاد الإستراتيجيات المسيطرة من قائمة Tools نختار
Dominance
Find undominated actions


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
A
B
B1 B2 B3 4
A1 8 -8 -2 2 9 -9 -3 3
A2 6 -6 5 -5 6 -6 8 -8
A3 -2 2 4 -4 -9 9 5 -5
Compute Nash equilibria
Compute all Nash equilibria
with Gambit's recommended method
Cancel
OK
لإيجاد إستراتيجيات ناش نختار Tools ثم Equilibrium فتظهر
نافذة الخيارات المقابلة نضغط OK



الحل على شكل شجرة مباريات:


Chance
Player 1
Player 2
A1
A2
A3
1:1
2:1
2:2
2:3
B1
B2
B3
B4
8 -8
-2 2
9 -9
-3 3
6 -6
5 -5
6 -6
8 -8
-2 2
4 -4
-9 9
5 -5



Profiles 1 All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game

#	1: A1	1: A2	1: A3	1: B1	1: B2	1: B3	1: B4	2: B1	2: B2	2: B3	2: B4	3: B1	3: B2	3: B3	3: B4
1	0	1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	0	1	0	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	0	0
3	0	1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	0	1	0	0	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{7}{10}$	0
4	0	1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	0	1	0	0	$\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{7}{10}$
5	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
6	0	1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	0	1	0	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0
7	0	1	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0

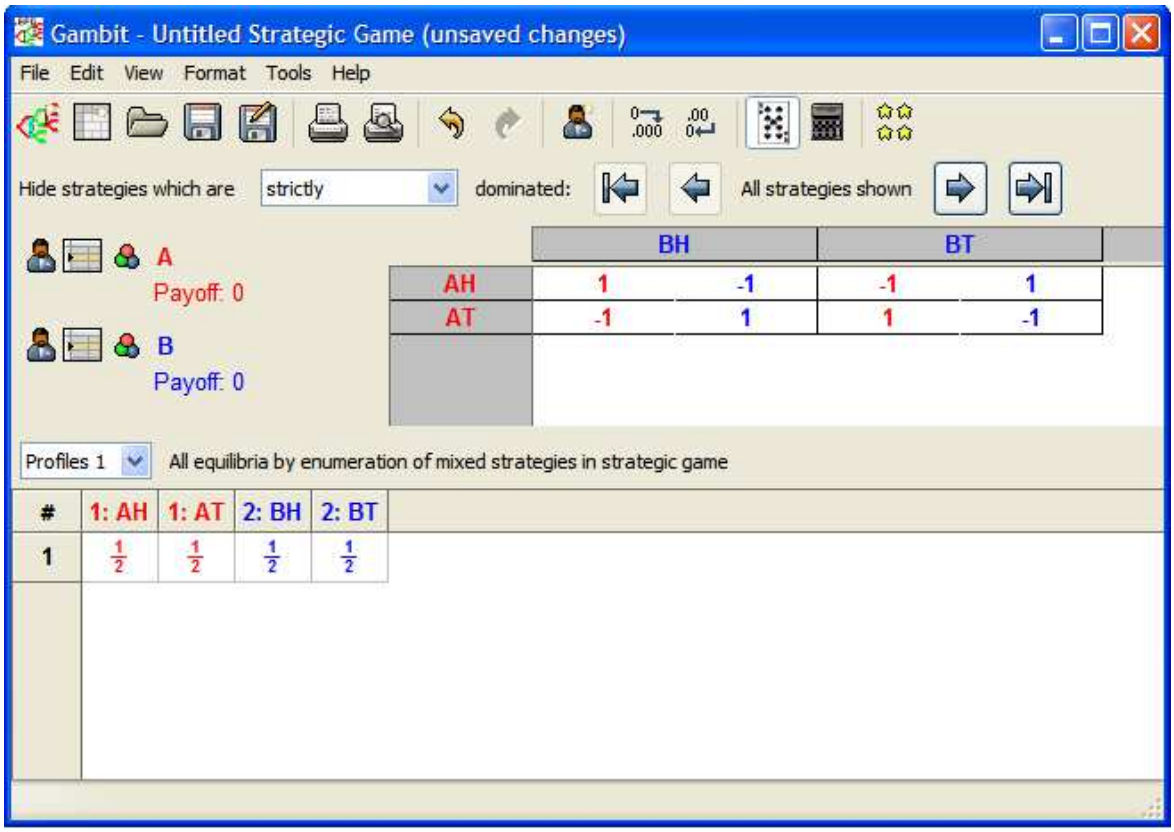
مثال على الإستراتيجيات المختلطة

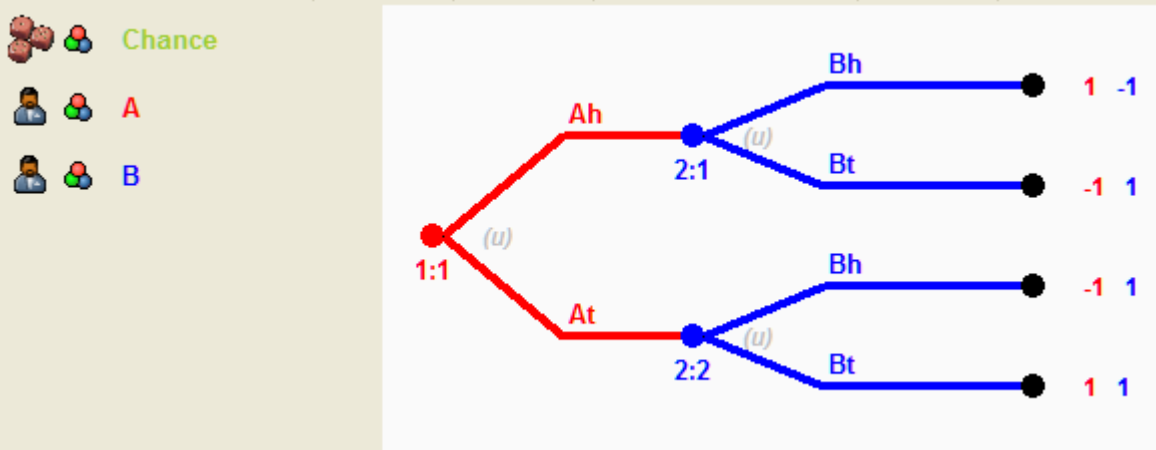
يقوم لاعبين A و B كل منهما برمي عملة بدون أن يشاهد اللاعب الآخر النتيجة إذا كانت H أو T. ثم يقوما بإعلان النتيجة في نفس الوقت. في حالة كون النتيجة متشابهة (أي HH أو TT) يكسب A نقطة من B وإلا يكسب B نقطة.

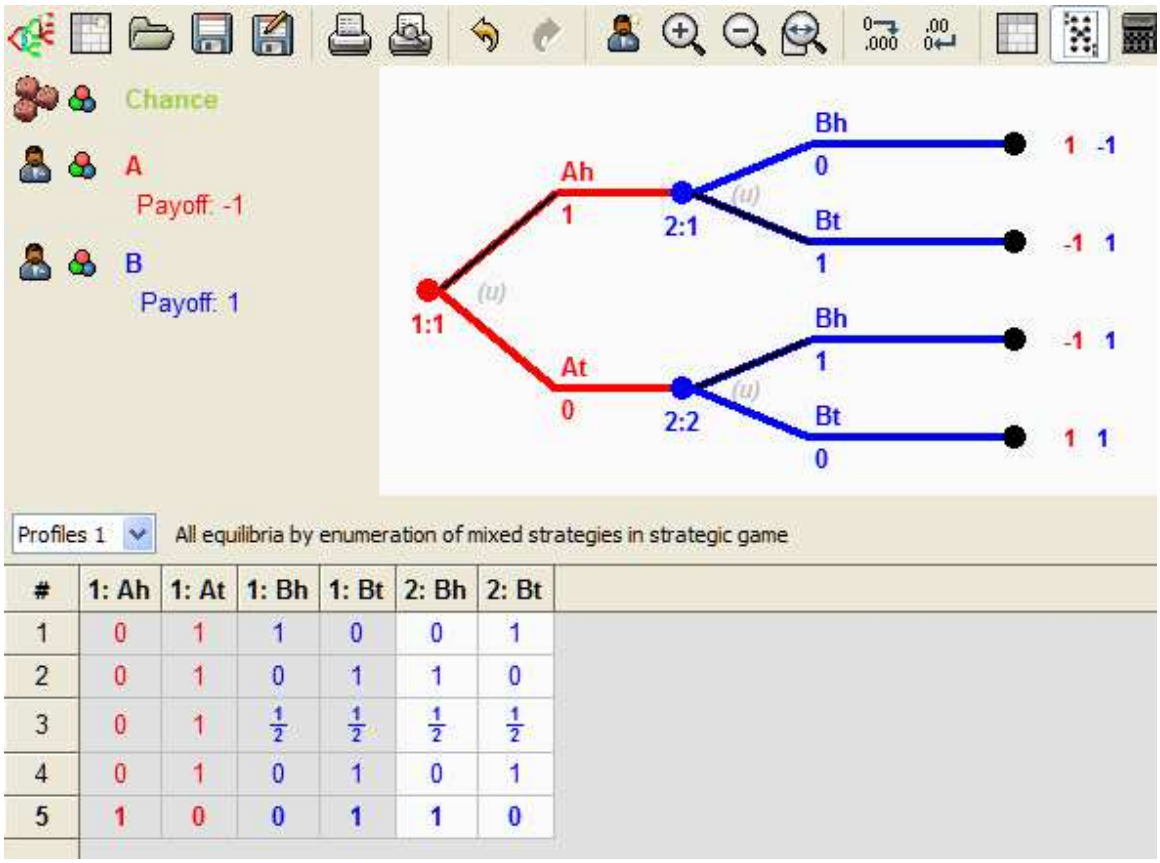
مصفوفة المدفوعات للاعب A :

	B_H	B_T
A_H	1	-1
A_T	-1	1

الحل بواسطة *Gambit*







#	1: Ah	1: At	1: Bh	1: Bt	2: Bh	2: Bt
1	0	1	1	0	0	1
2	0	1	0	1	1	0
3	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	0	1	1	0

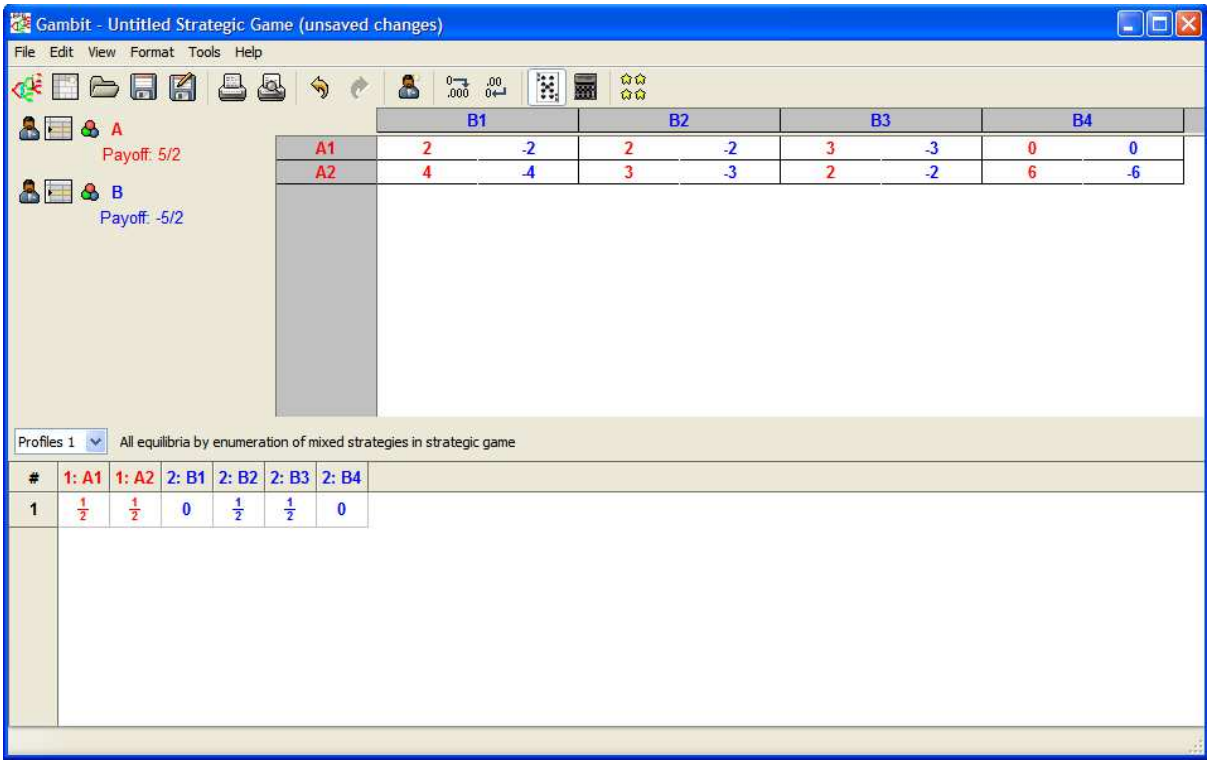
تمرين: فسر النتائج وقارنها مع النتائج السابقة.

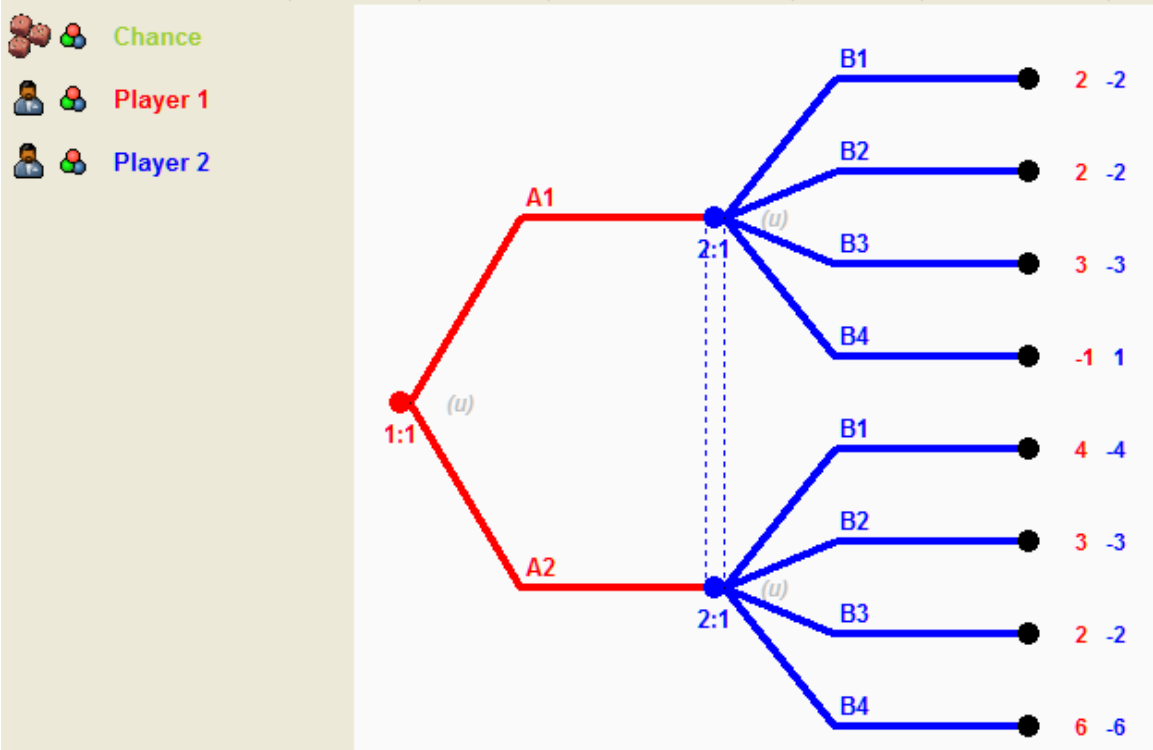
مثال آخر

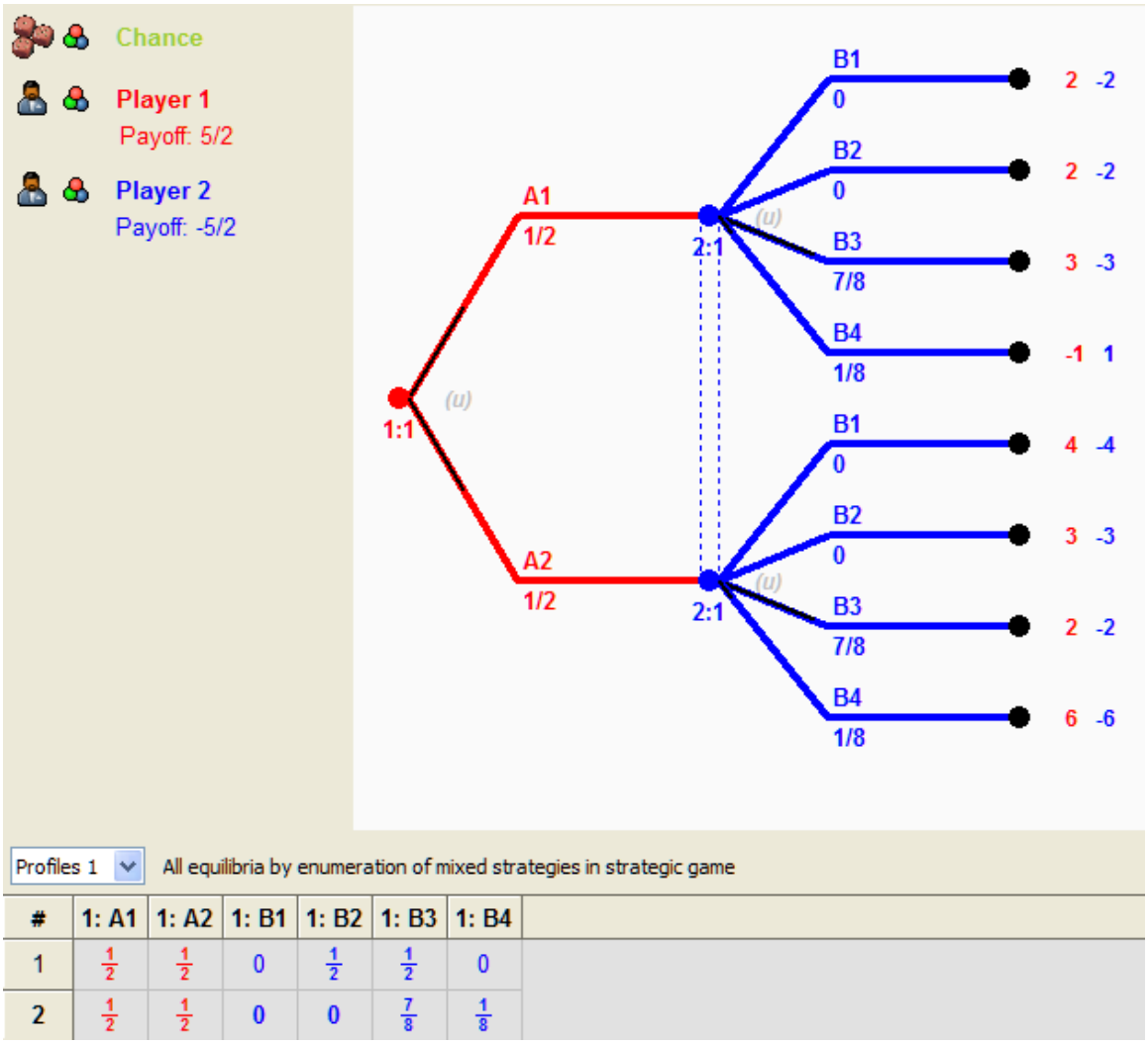
لنعتبر المباراة *4* x *2* والتي مصفوفة المدفوعات للاعب A هي:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

لايوجد حل صافي الإستراتيجية.




Chance
Player 1
Player 2
1:1
(u)
A1
A2
2:1
2:1
(u)
(u)
B1
B2
B3
B4
B1
B2
B3
B4
2 -2
2 -2
3 -3
-1 1
4 -4
3 -3
2 -2
6 -6



Profiles 1 All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game

#	1: A1	1: A2	1: B1	1: B2	1: B3	1: B4
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

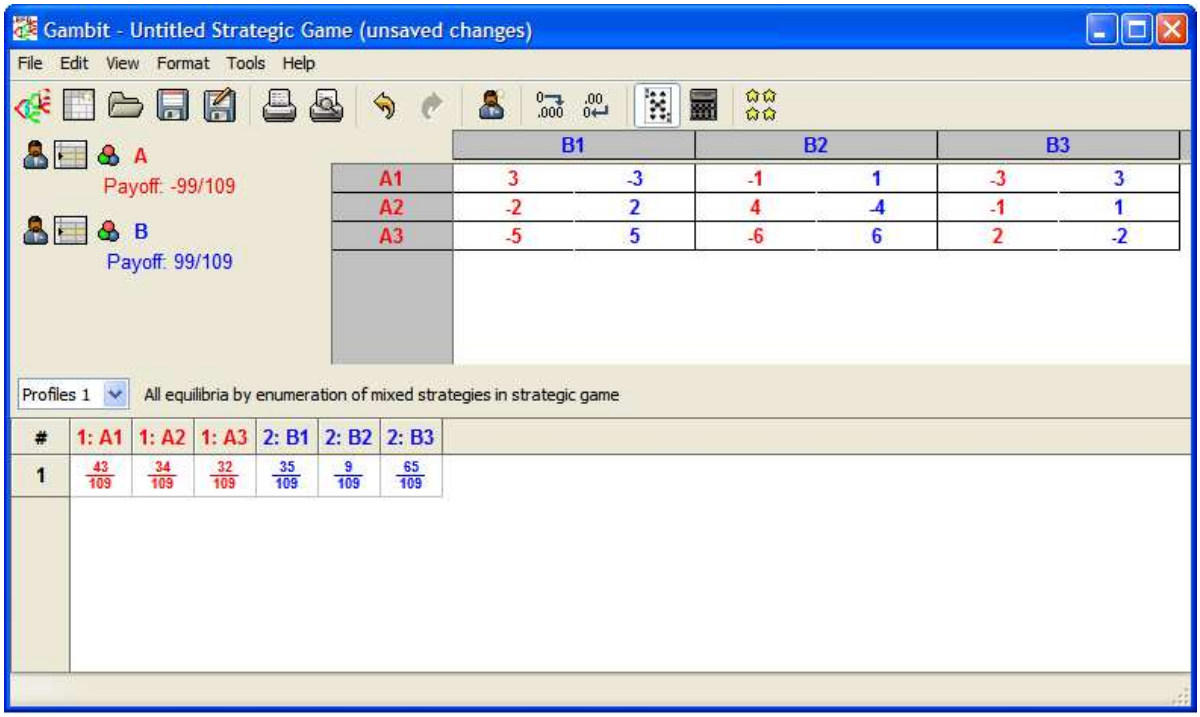
تمرين: فسر النتائج وقارنها مع النتائج السابقة.

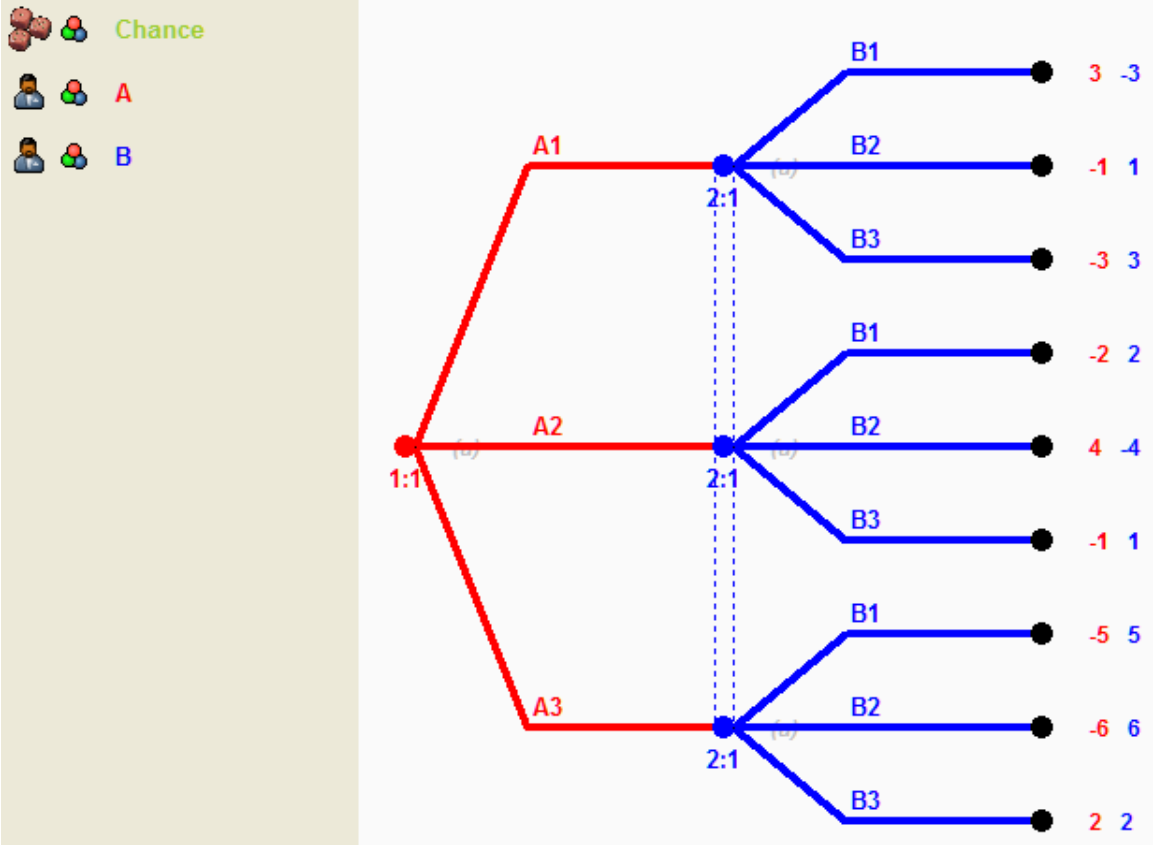
مثال آخر

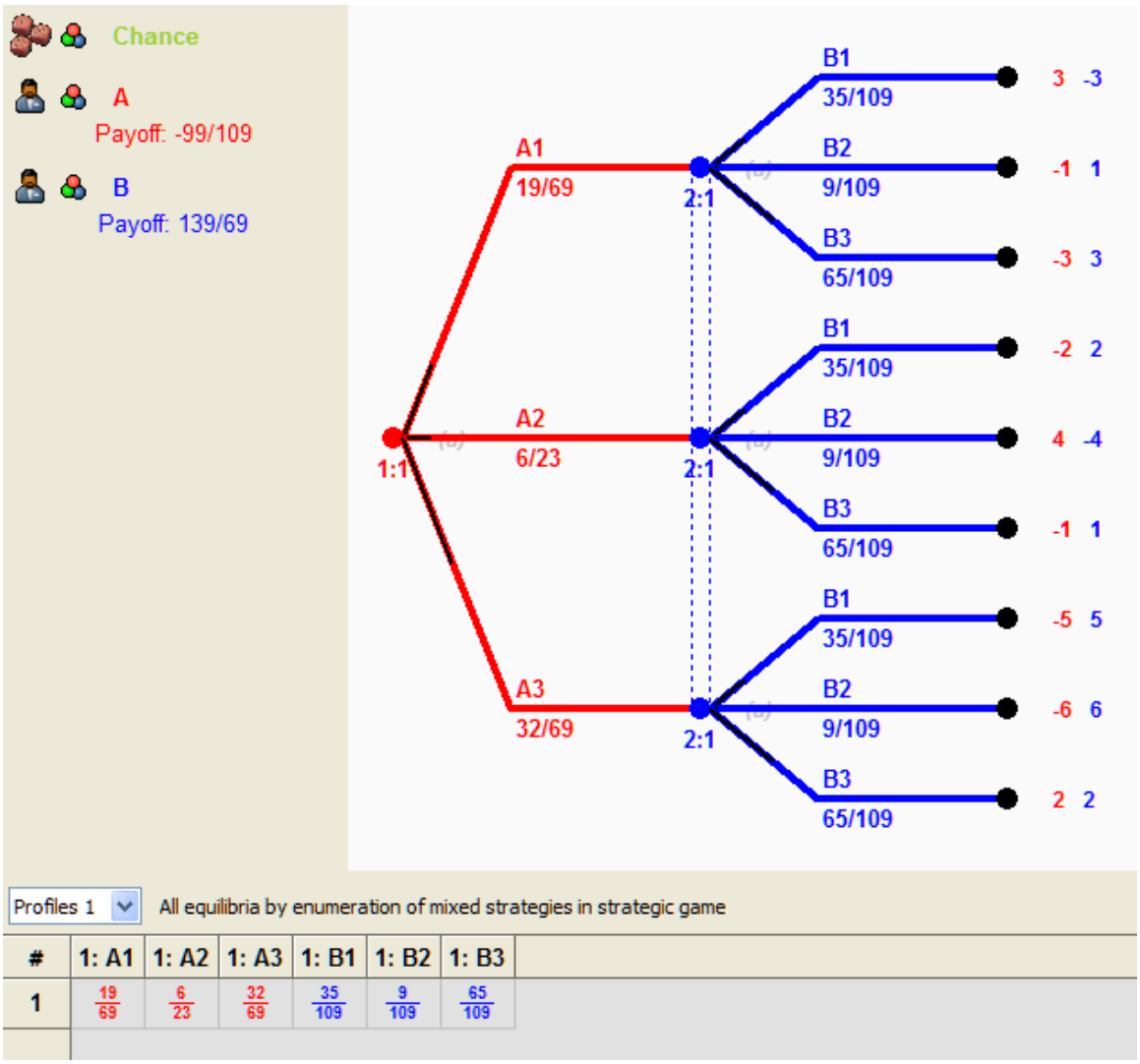
حل المباراة التالية بواسطة *Gambit*:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

الحل:




Chance
A
B
A1
A2
A3
B1
B2
B3
1:1
2:1
2:1
2:1
3 -3
-1 1
-3 3
-2 2
4 -4
-1 1
-5 5
-6 6
2 2



تمرين: فسر النتائج وقارنها مع النتائج السابقة.

حالات دراسية *Case Studies*:

(1

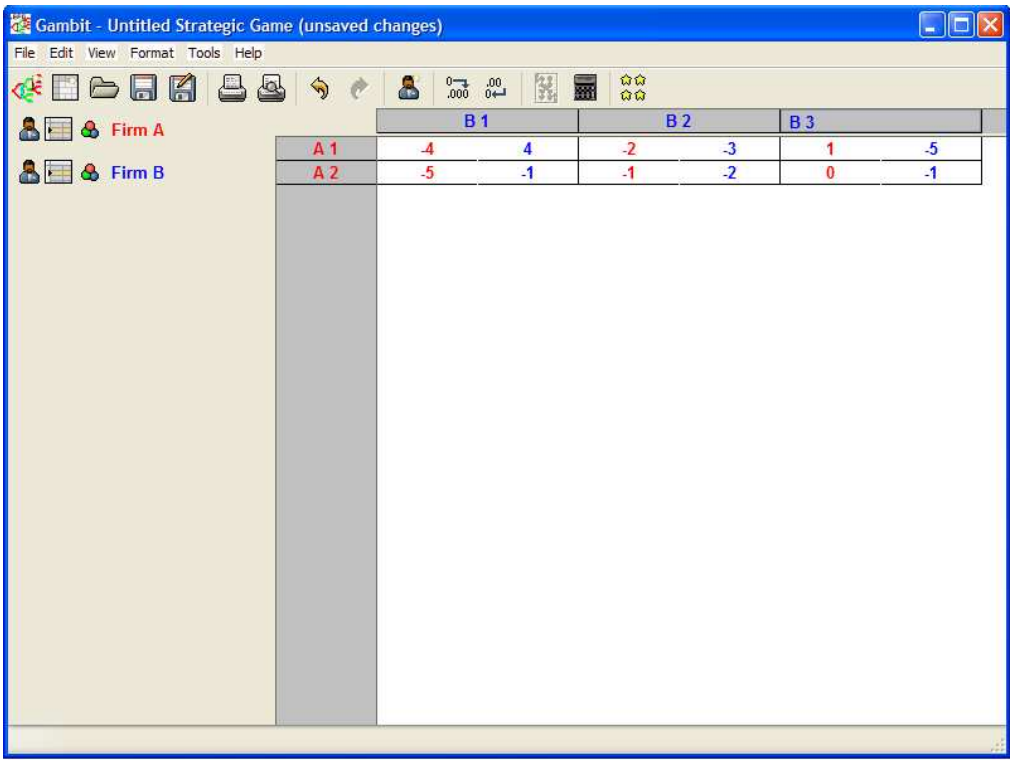
شركتين والتي كلا منهما على وشك تقديم نوع محسن من منتج شائع. النوعين متشابهة تماما بحيث أن مكسب أحد الشركتين يتأثر كثيرا بقرارات إعلاناته وبالقرارات المماثلة لمنافسه. سنفترض ببساطة أن القرار الرئيسي لكل شركة هو مستوى الإعلانات.

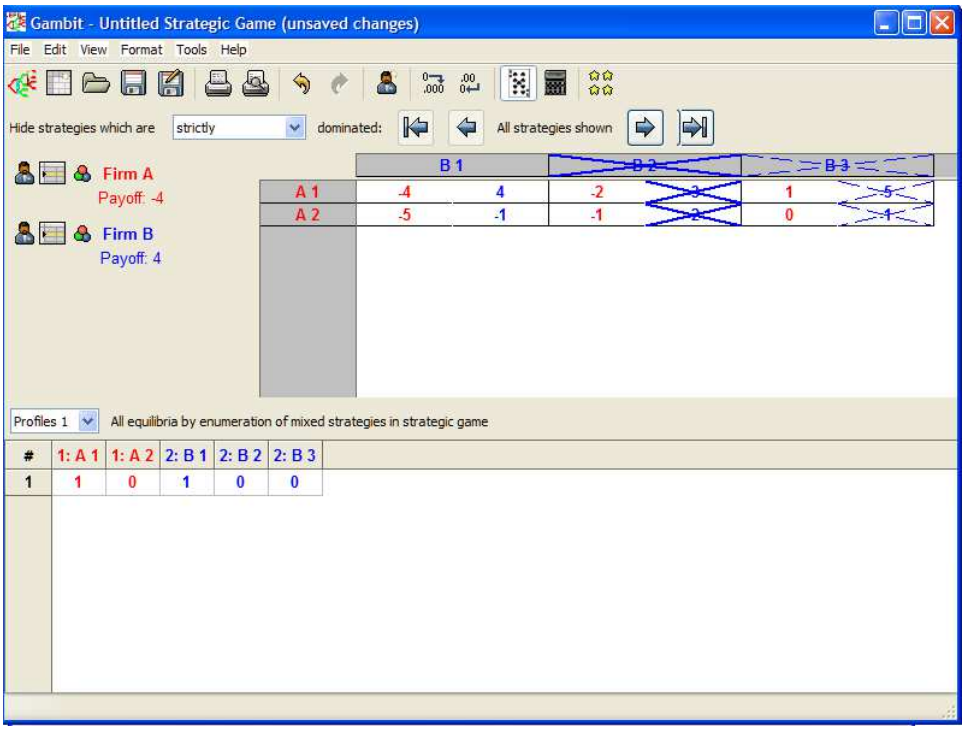
لنفترض أن الخسائر (بملايين الريالات) كدالة للقرارات المتخذه كما في الجدول التالي:

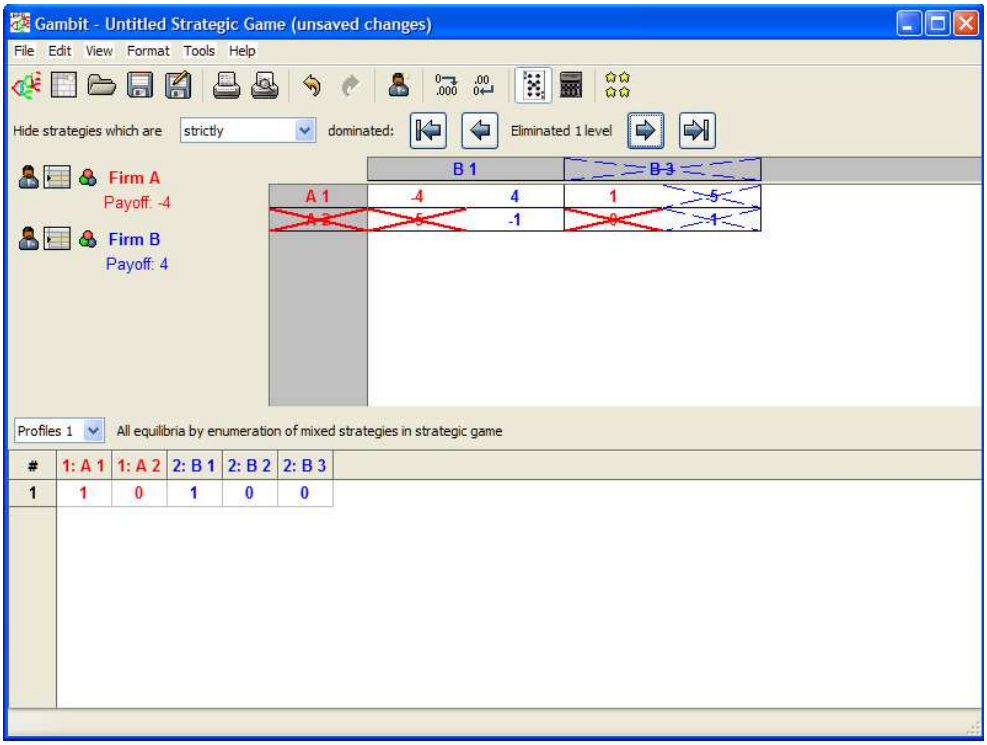
		Firm A		
		No Advertise	Advertise Medium	Advertise High
Firm B	No Advertise	-4 / -4	-3 / -2	-5 / 1
	Advertise	-1 / -5	-2 / -1	-1 / 0

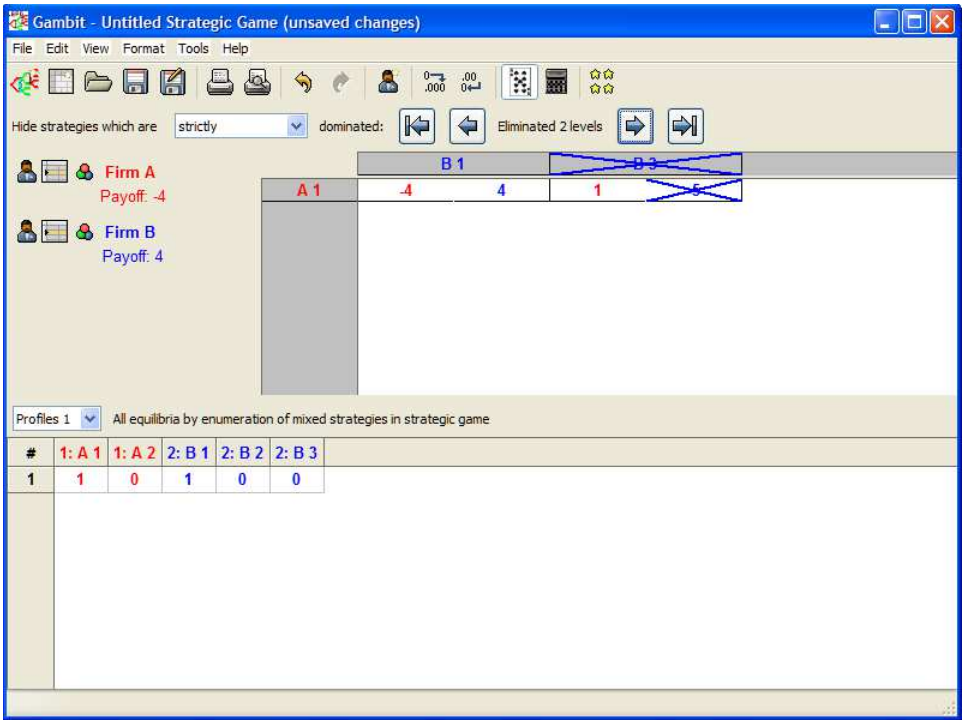
يبين المثال أن كل لاعب ليس من الضروري أن يكون له بالتمام نفس النوع من البدائل فالخسائر السالبة تعني أرباح.

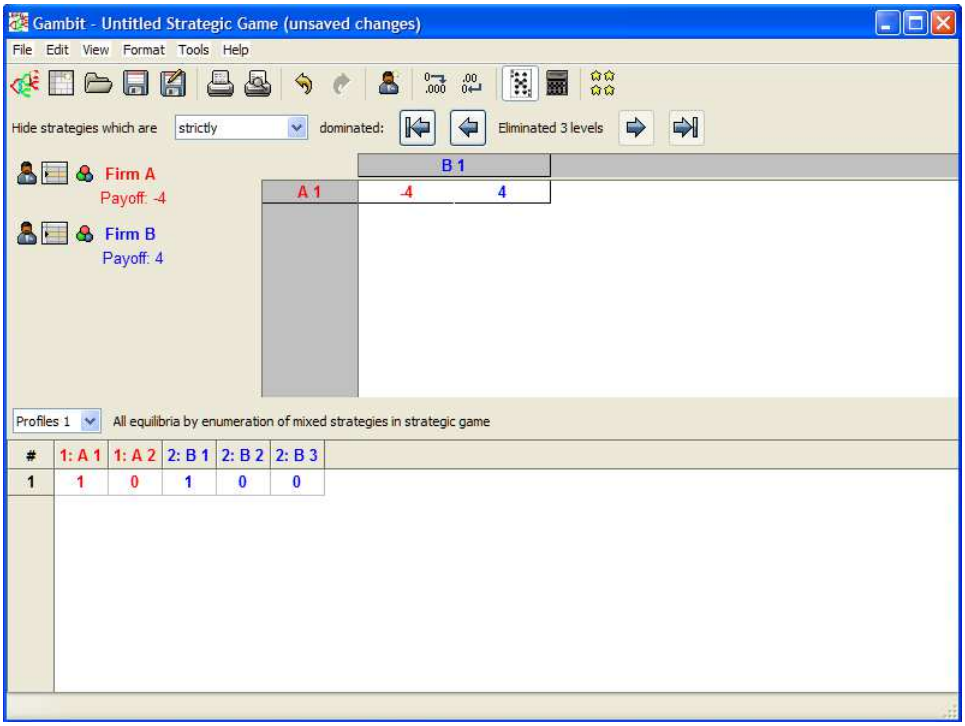
الحل:

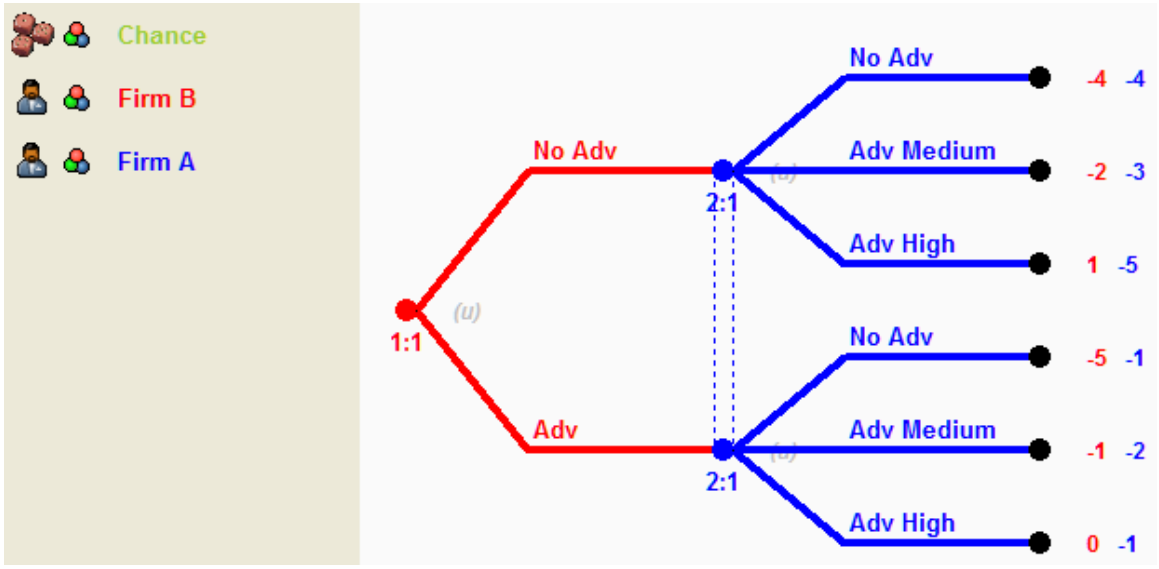

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Firm A
Firm B
B 1
B 2
B 3
A 1
A 2
-4 4 -2 -3 1 -5
-5 -1 -1 -2 0 -1

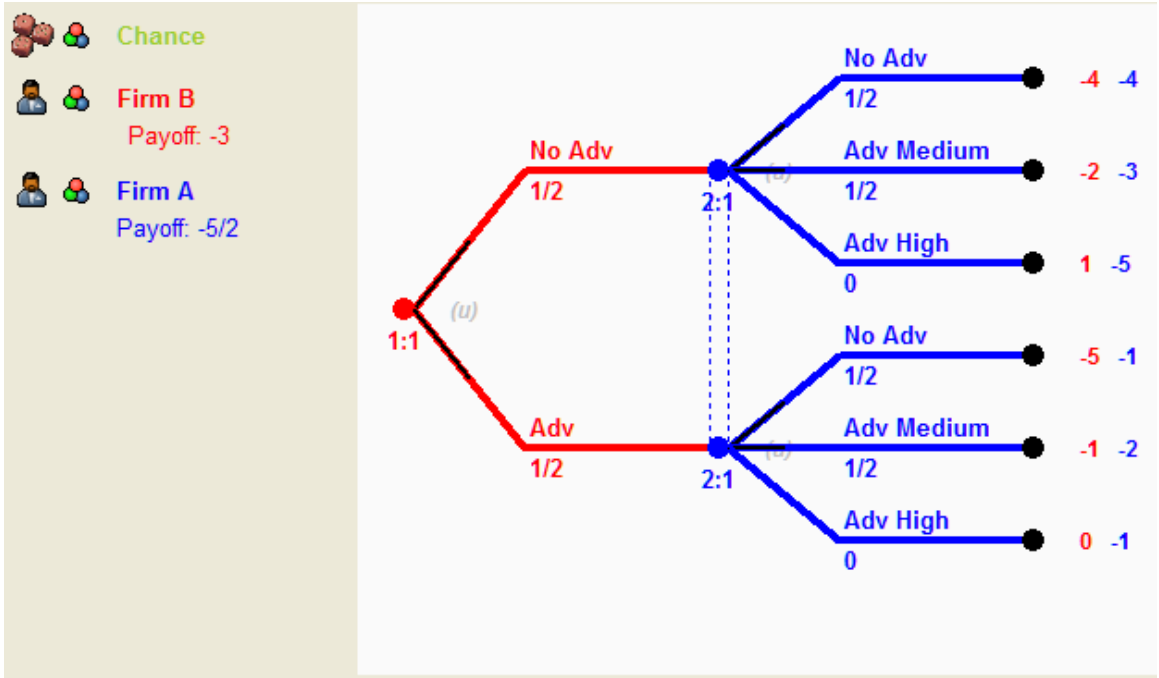

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated: All strategies shown
Firm A
Payoff: -4
Firm B
Payoff: 4
B 1
B 2
B 3
A 1
A 2
-4 4 -2 -3 1 -5
-5 -1 -1 -2 0 -1
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: A 1 1: A 2 2: B 1 2: B 2 2: B 3
1 1 0 1 0 0


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated: Eliminated 1 level
Firm A
Payoff: -4
Firm B
Payoff: 4
B 1 B 3
A 1 -4 4 1 -5
A 2 -5 -1 0 -1
Profiles 1 All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: A 1 1: A 2 2: B 1 2: B 2 2: B 3
1 1 0 1 0 0


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated: Eliminated 2 levels
Firm A
Payoff: -4
Firm B
Payoff: 4
B 1 B 3
A 1 -4 4 1 -5
Profiles 1 All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: A 1 1: A 2 2: B 1 2: B 2 2: B 3
1 1 0 1 0 0


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated: Eliminated 3 levels
Firm A
Payoff: -4
Firm B
Payoff: 4
B 1
A 1 -4 4
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: A 1 1: A 2 2: B 1 2: B 2 2: B 3
1 1 0 1 0 0


Chance
Firm B
Firm A
No Adv
Adv
(u)
1:1
No Adv
Adv Medium
Adv High
(u)
2:1
No Adv
Adv Medium
Adv High
(u)
2:1
-4 -4
-2 -3
1 -5
-5 -1
-1 -2
0 -1



Profiles 1 All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game

#	1: No Adv	1: Adv	1: No Adv	1: Adv Medium	1: Adv High
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

حالة دراسة: سوف نقوم بإستعراض حل مثال (2 -8) من كتاب الدكتور البلخي "نظرية المباريات" صفحة 52

مثال (2 – 8)

المصفوفة G_0 التالية هي مصفوفة مباراة ذات مجموع صفري للاعبين A و B . المطلوب كتابة البرنامج الخطي ثم إيجاد الحل الأمثل لكلا اللاعبين :

$$G = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad G_0 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل . لضمان الحصول على قيمة موجبة للمباراة نضيف العدد $k = |4| + 1 = 5$ إلى جميع عناصر المصفوفة G_0 فنحصل على المصفوفة G . وكما نلاحظ لا توجد هيمنة بين الاستراتيجيات لأي من اللاعبين كما لا توجد نقطة سرجية . والبرنامج الخطي للاعبين A و B هما كما يلي :

البرنامج الخطي للاعب A بعد استخدام العلاقات $x_i = \bar{x}_i / \upsilon$, $y_i = \bar{y}_i / \upsilon$ هو :

$$\text{صغرّ الدالة} \qquad X = x_1 + x_2 + x_3 \ (= \frac{1}{\upsilon})$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{gathered} 8\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4\,x_1 + 8\,x_2 + 2\,x_3 \geq 1 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + 8\,x_3 \geq 1 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

مع العلم بأن $\upsilon = \frac{1}{X}$ و $\upsilon_0 = \frac{1}{X} - 5$

وأن احتمال أن يلعب A الاستراتيجية A_i هو $\bar{x}_i = \frac{x_i}{Z} = x_i . \upsilon$

والبرنامج الخطي للاعب B هو :

$$\text{كبّر الدالة} \qquad Y = y_1 + y_2 + y_3 \ (= \frac{1}{\upsilon})$$

وفقاً للقيود

$$8\,y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 \le 1 \qquad (7)$$
$$2\,y_1 + 8\,y_2 + 4\,y_3 \le 1 \qquad (8)$$
$$y_1 + 2\,y_2 + 8\,y_3 \le 1 \qquad (9)$$
$$y_1 , y_2 , y_3 \ge \qquad (10)$$

مع العلم بأن : $\upsilon = \frac{1}{Y}\ (= \frac{1}{X})$ وأن $\upsilon_0 = \frac{1}{Y} - 5$ وأن $\overline{y_i} = \frac{y_i}{Y} = y_i . \upsilon$

وكما نلاحظ فإن مسألة اللاعب A هي المسألة الثنوية (Dual problem) لمسألة اللاعب B . وهذا الأمر صحيح دوماً من أجل أي مباراة ذات مجموع صفري لشخصين . وكما هو معلوم فإن جدول الحل الأمثل لأي من المسألتين يعطي بنفس الوقت الحل الأمثل للمسألة الأخرى . ولما كان حل مسألة اللاعب B لا يحتاج إلا إلى المرحلة الأولى من خوارزمية السمبلكس فإننا نقوم عادة باختيار حل مسألة اللاعب B ومنها نستنتج حلول مسألتي اللاعبين A و B . ولمزيد من التفاصيل حول طريقة الحل باستخدام خوارزمية السمبلكس يمكن للقارىء التعرف على هذه الخوارزمية وطريقة استخدامها في " الملحق " في نهاية هذا الكتاب .

نعود الآن إلى مسألة اللاعب B فإذا كتبنا دالة الهدف كأحد القيود أي : كبّر الدالة Y وفقاً لـ $Y - y_1 - y_2 - y_3 = 0$ والقيود (7) إلى (10) وإذا أضفنا المتغيرات الراكدة s_1 ، s_2 ، s_3 للقيود (7) و (8) و (9) فإننا نحصل على الصيغة القياسية التالية **لمسألة اللاعب B**

كبّر الدالة Y

$$Y - y_1 - y_2 - y_3 + 0.\,s_1 + 0.\,s_2 + 0.\,s_3 = 0$$
$$8\,y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 + s_1 + 0.\,s_2 + 0.\,s_3 = 1$$
$$2\,y_1 + 8\,y_2 + 4\,y_3 + 0.\,s_1 + s_2 + 0.\,s_3 = 1$$
$$y_1 + 2\,y_2 + 8\,y_3 + 0.\,s_1 + 0.\,s_2 + s_3 = 1$$
$$y_1 , y_2 , y_3 , s_1 , s_2 , s_3 \ge 0$$

وبإجراء الحسابات باستخدام طريقة السمبلكس نجد أن جداول الحلول المتتابعة لهذا البرنامج هي كما في الجدول (2 ــ 1) التالي :

	$y_1 \downarrow$	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	الحل	النسبة
Y	-1	-1	-1	0	0	0	0	
s_1	⑧	4	2	1	0	0	1	1/8 →
s_2	2	8	4	0	1	1	1	1/2
s_3	1	2	8	0	0	1	1	1
Y	0	-0.5	-0.75	0.13	0	0	0.13	
y_1	1							
s_2	0							
s_3	0							
Y								
Y	0	0	0	0.1	0.06	0.07	0.23	
جدول الحل الأمثل y_1	1	0	0	0.14	-0.07	0	0.07	
y_2	0	1	0	-0.3	0.16	0.07	0.06	
y_3	0	0	1	-0.01	-0.03	0.14	0.10	

جدول (2 ــ 1) الحل الأمثل والحلول المتتابعة لمسألة اللاعب B لمثال (2 ــ 8)

ومن جدول الحل الأمثل [وهو الجدول الأخير من الجدول (2 ــ 1)] نجد ما يلي :

$$y_1 = 0.07 \text{ ، } y_2 = 0.06 \text{ ، } y_3 = 0.10 \text{ و } Y = 0.23 \text{ و } \upsilon = \frac{1}{Y} \approx 4.35$$

لاحظ أن : $y_1 + y_2 + y_3 \neq 1$ وأن $\upsilon > 0$

ولـــذلك فـــإن $\bar{y}_1 = \frac{y_1}{Y} = 0.304$ ، $\bar{y}_2 = 0.269$ ، $\bar{y}_3 = 0.435$ (لاحـــظ أن $(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 = 1)$ أما قيمة المباراة الأصلية فهي $\upsilon_0 = \frac{1}{Y} - 5 = -0.652$

لاحظ أن هذه القيمة هي قيمة سالبة وهذا يبرر إضافة $k = 5$ إلى جميع عناصر المصفوفة الأصلية . والحل أعلاه يعني أن على اللاعب B أن يلعب الاستراتيجية المختلطة (B_1 , B_2 , B_3) بالاحتمالات $(0.435 , 0.269 , 0.304)$ ليحصل على أفضل قيمة وهي $\upsilon_b = +0.652$.

يمكننا الآن أن نحصل على الحل الأمثل لمسألة اللاعب A من جدول الحل الأمثل في الجدول (2 ــ 1) حيث تتمثل قيم المتغيرات x_1 ، x_2 ، x_3 بتلك القيم تحت المتغيرات غير الأساسية في جدول الحل الأمثل أي :

$$x_1 = 0.1 \quad \text{و} \quad x_2 = 0.06 \quad \text{و} \quad x_3 = 0.07 \quad \text{ولكن} \quad X = Y = 0.23$$

ومنه نجد $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{X} = 0.435$ ، $\bar{x}_2 = \frac{x_2}{X} = 0.269$ و $\bar{x}_3 = \frac{x_3}{X} = 0.304$

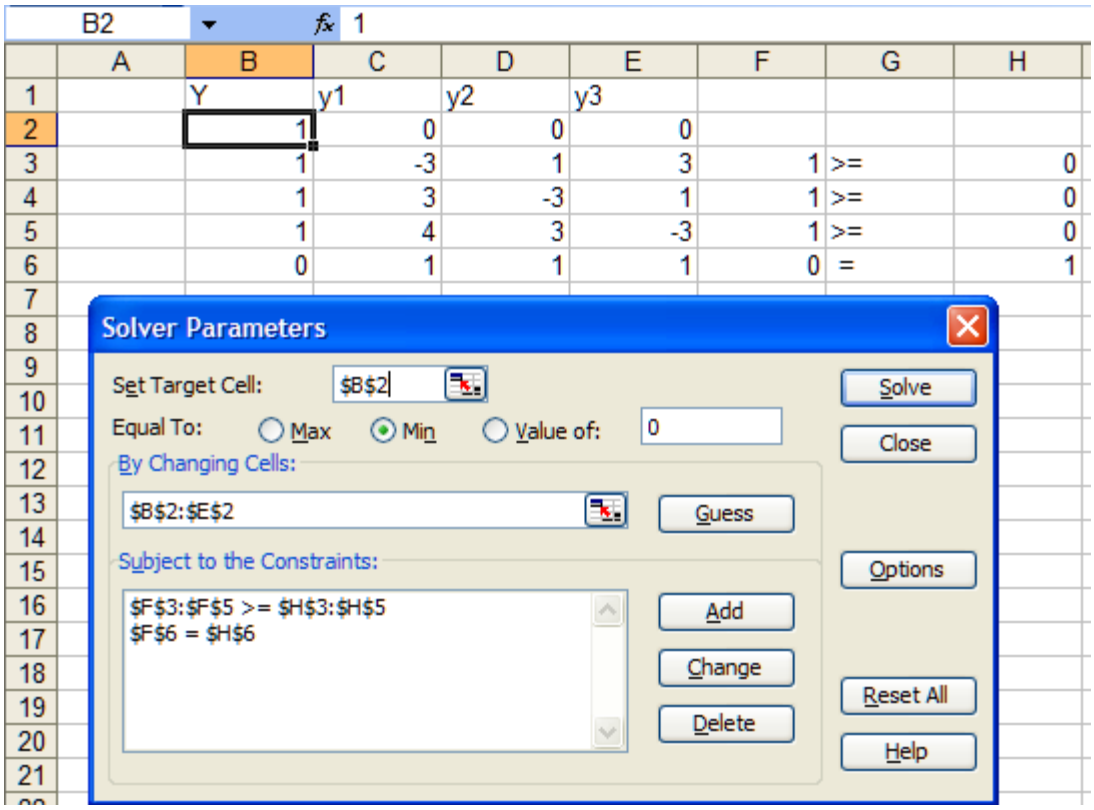
أي أن على اللاعب A أن يلعب الاستراتيجية المختلطة (A_1 , A_2 , A_3) بالاحتمالات $(0.304 , 0.269 , 0.435)$ ليحصل بذلك على أفضل قيمة $\upsilon_0 = -0.652$.

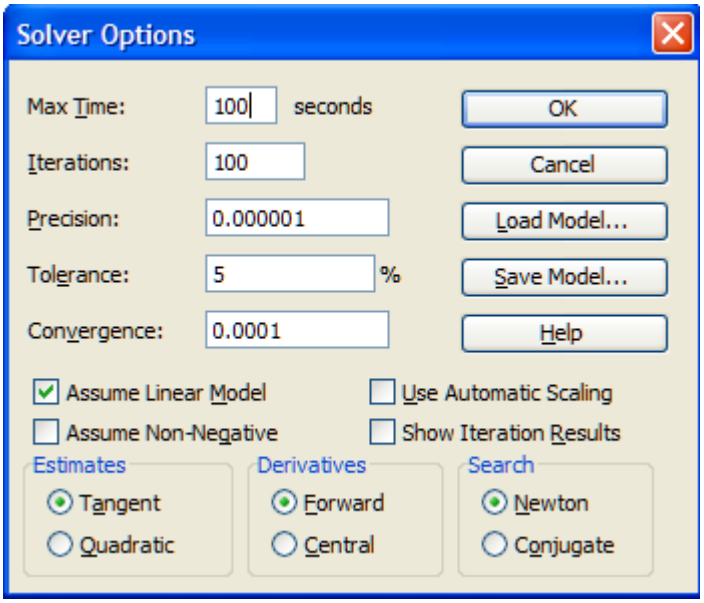
حلنا:

بواسطة *Excel Solver*:

F3 =SUMPRODUCT($B$2:$E$2,B3:E3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Y	y1	y2	y3			
2		1	0	0	0			
3		1	-3	1	3	1	>=	0
4		1	3	-3	1	1	>=	0
5		1	4	3	-3	1	>=	0
6		0	1	1	1	0	=	1

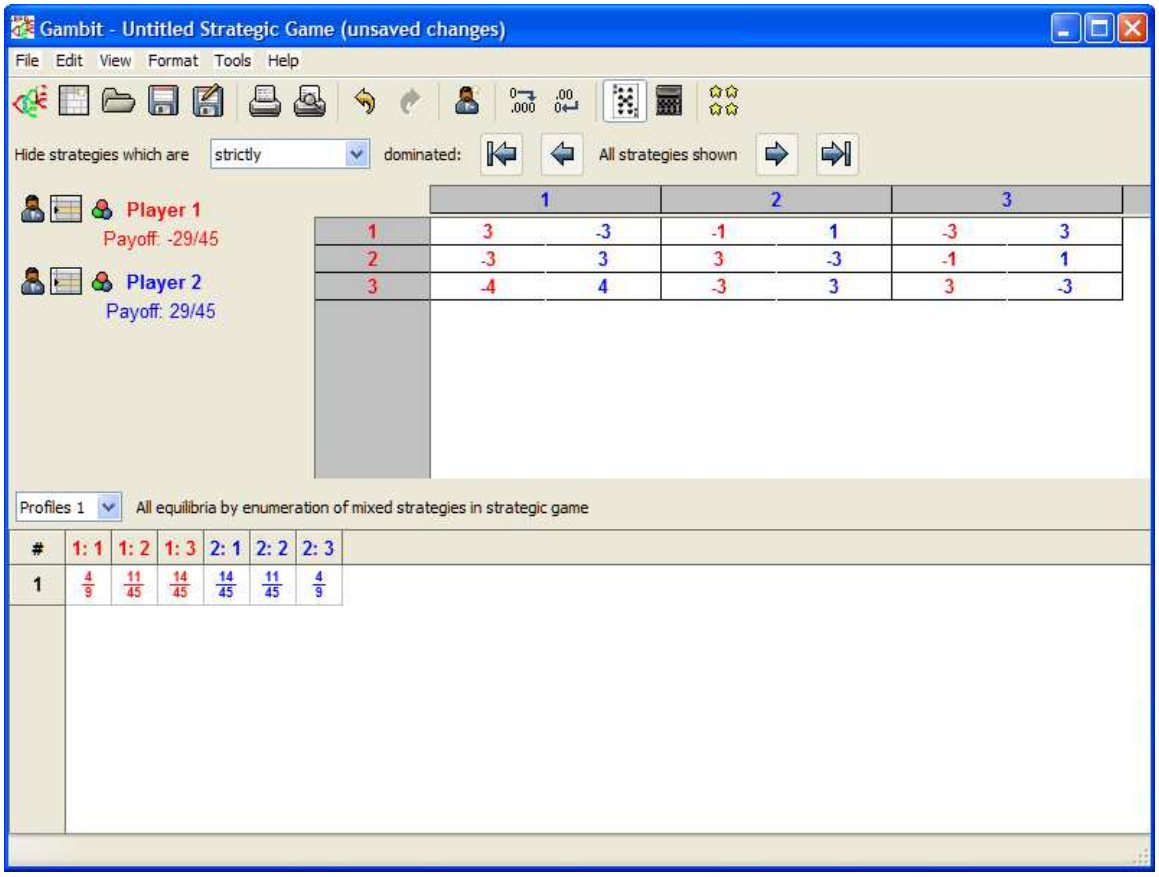

B2
1
Y
y1
y2
y3
Solver Parameters
Set Target Cell: $B$2
Equal To: Max Min Value of: 0
By Changing Cells:
$B$2:$E$2
Guess
Subject to the Constraints:
$F$3:$F$5 >= $H$3:$H$5
$F$6 = $H$6
Add
Change
Delete
Solve
Close
Options
Reset All
Help

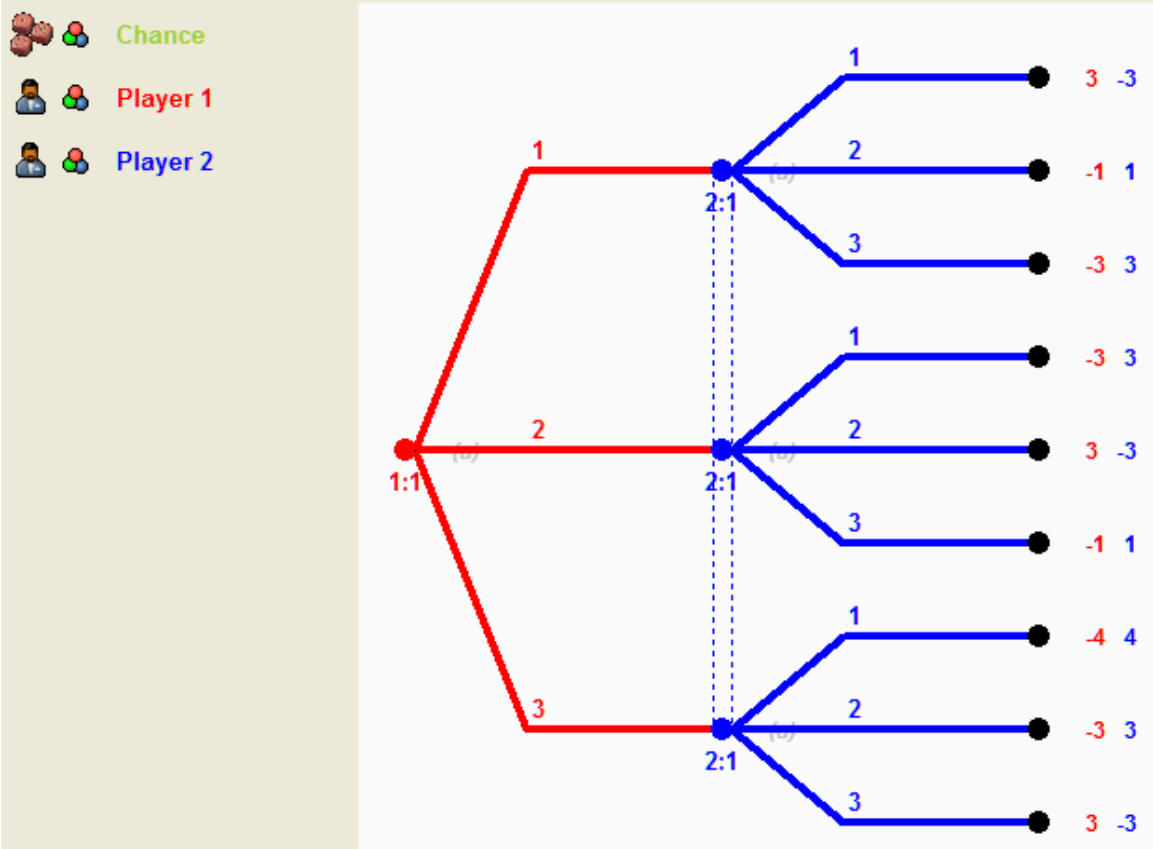

Solver Options
Max Time: 100 seconds
Iterations: 100
Precision: 0.000001
Tolerance: 5 %
Convergence: 0.0001
OK
Cancel
Load Model...
Save Model...
Help
Assume Linear Model
Use Automatic Scaling
Assume Non-Negative
Show Iteration Results
Estimates
Tangent
Quadratic
Derivatives
Forward
Central
Search
Newton
Conjugate

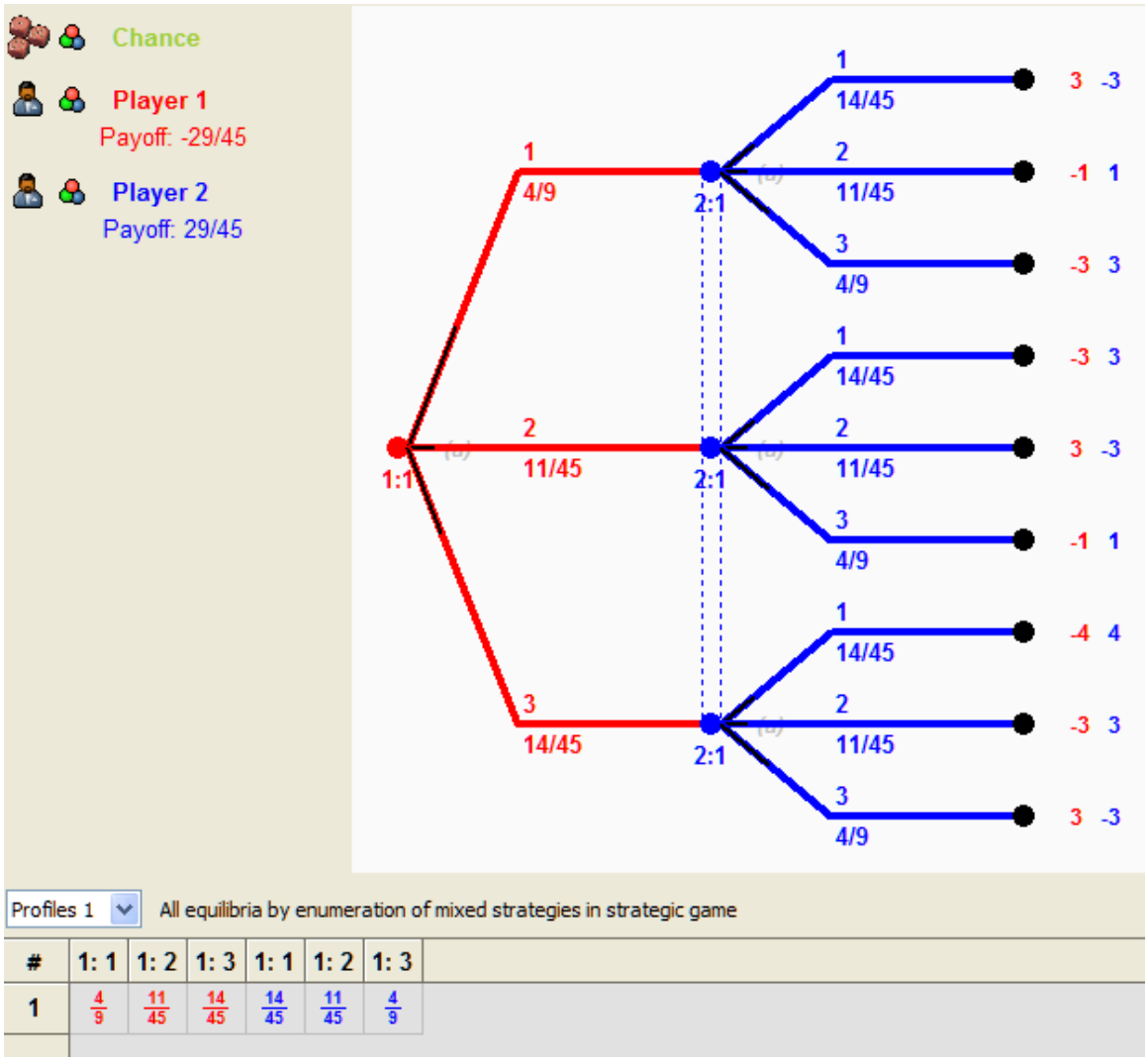
B2 -0.644444444446403

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Y	y1	y2	y3			
2		-0.64444	0.311111	0.244444	0.444444			
3		1	-3	1	3	-1.4E-12	>=	0
4		1	3	-3	1	-2.9E-12	>=	0
5		1	4	3	-3	-1.9E-12	>=	0
6		0	1	1	1	1	=	1

الحل بواسطة *Gambit*:




Chance
Player 1
Player 2
1:1
1
2
3
2:1
2:1
2:1
1
2
3
1
2
3
1
2
3
3 -3
-1 1
-3 3
-3 3
3 -3
-1 1
-4 4
-3 3
3 -3



Profiles 1 All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game

#	1: 1	1: 2	1: 3	1: 1	1: 2	1: 3
1	4/9	11/45	14/45	14/45	11/45	4/9

تمارين (2 ــ 1)

1 ــ يقوم كل من اللاعبين A و B برمي قطعة عملة متوازنة وقد اتفقا على أن A يربح 1$ من B إذا توافق الوجهان الظاهران و إلا فإن B يربح 1$ من A .

المطلوب :

أ) تحليل هذه اللعبة ورسم شجرتها وإيجاد استراتيجيات كل من اللاعبين .

ب) إيجاد مصفوفة العوائد ثم حساب قيمة هذه اللعبة .

2 ــ يقوم كل من اللاعبين A وB وبشكل مستقل بكتابة أحد الأعداد 3 ، 2 ، 1 فإذا كان مجموع ناتج الكتابة زوجي فإن A يدفع لــB مقدار هذا المجموع بالدولار أما إذا كان مجموع ناتج الكتابة فردي فإن B يدفع لــ A مقدار هذا المجموع بالدولار .

المطلوب :

أ) تحليل هذه اللعبة ورسم شجرتها وإيجاد استراتيجيات كل من A و B .

ب) إيجاد مصفوفة العوائد ثم حساب قيمة هذه اللعبة .

ج) هل الحل الأمثل هو استراتيجية بحته أم مختلطة ؟ وما هي هذه الاستراتيجية .

3 ــ تتنافس فرقتان عسكريتان A و B على احتلال موقعين عسكريين L_1 و L_2 في إحدى المناورات . تتكون الفرقة A من لواءين بينما تتكون الفرقة B من لواء واحد ، وتهدف قيادة كل فرقة إلى تحقيق أكبر ربــح ممكن وفقاً للقاعدة التالية:

مقدار ربح أو خسارة الفرقة في أي موقع يســاوي الفرق في عــدد ألويتها المتواجدة في ذلك الموقع على ألوية الفرقة الأخــرى . أوجد كل من شجرة المباراة واستراتيجيات كل من الفرقتين ومصفوفة العوائد والحل الأمثل لكلا الفرقتين .

4 ــ تمثل المصفوفة التالية مصفوفة العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة لشركتي فنادق لكســب الزبائن في عواصم إحدى الدول ، الأرقام بمئات الملايين من الدولارات

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 4 & -8 & -10 \\ -10 & -10 & 14- \end{bmatrix}$$

هل من هيمنة بين الاستراتيجيات

ما هي الاستراتيجية المثلى لكلا الشركتين وقيمة المباراة . أوجد الحل بيانياً .

5 ــ أوجد الحل الأمثل للمباريات التالية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \\ 5 & 4 & 5 \\ 16 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

6 ــ تتنافسان مؤسستان في سوق معين وكل مؤسسة تستطيع أن نختار للترويج عن بضـــاعتها ، أما عن طـــريق التلفزيون أو عن طـــريق الجرائد إذا علمت أن حصص المؤسستين في السوق وفقاً للطرق الدعائية معطاة في :

المؤسسة A \ المؤسسة B	J	TV
J	0.60	0.40
TV	0.50	0.70

فـــما هي الاستراتيجية المثلى لكل مؤسسة حـــول اســـتخدام التلفزيون والجرائد في ترويج بضائعها .

7 ــ شركتان بصدد اتخاذ قرار للإعلان عن منتجاتها المتنافسة ويمكن لأي منها أن تعرض إنتاجها في السوق الأول أو في السوق الثاني ، فإذا عرضت الشركتان إنتاجهما في الســـوق نفسه فإن كل شركة ستبيع من منتجاتها بنسبة % 30 من المستهلكين وإن عرضت منتجاتها في سوق مختلف فإنها ستبيعه إلى % 50 من المستهلكين ، وقد قدر عدد مستهلكي السوق الأول بـــ 40000 مستهلك وعدد مستهلكي السوق الثاني 60000 مستهلك . إذا علمت أن كل شركة تهدف إلى جعل الفرق بين عدد زبائنها وزبائن الشركة المنافسة أكبر ما يمكن المطلوب تحليل هذه المباراة ورسم شجرتها وإيجاد مصفوفة العوائد ومن ثم الحل المثل لكل منهما .

8 ــ لنفرض أن شخصين A ، B يلعبان المباراة التالية :

يكتب كل منهما رقماً على ورقة ولا يراها الأخر ثم تكشف الورقتان معاً فإذا كان الرقمان فرديين فإن B يدفع لـــ A مبلغ ثلاثة دولارات وإذا كان الرقمان زوجيين فإن B يدفع لـــ A دولا واحد ، أما إذا كان الرقمين أحدهما زوجياً والأخر فردياً فإن A هو الذي يدفع لـــ B دولارين والمطلوب :

1 ــ ارسم شجرة المباراة واكتب مصفوفة العوائد لهذه المباراة .

2 ــ أوجد الحل الأمثل للمباراة

9 ــ أوجد الحل الأمثل لكل من المباريات التالية باستخدام طريقة البرمجة الخطية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & -20 & 13 \\ 12 & 14 & 0 & 15 \\ 7 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

10 ــ المصفوفة التالية :

تبين الاستراتيجيات الثلاث للدفاع الجوي لمقابلة طائرات العدو الذي يستخدم ثلاثة أساليب في الهجوم ، والمطلوب تحديد أفضل أسلوب للدفاع الجوي لإيقاع أكبر خسارة في طائرات العدو ثم إيجاد قيمة هذه الخسائر .

استراتيجيات الهجوم

استراتيجيات الدفاع الجوي

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.05 \\ 0.4 & 0.45 & 0.15 \\ 0.2 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

11 ــ تتنافس شركتان لصناعة الطائرات الحربية للحصول على أكبر عدد من الدول المشترية لطائرتها . إن الأســلوب المتبع لزيادة نصيب كل شركة في السوق هو استخدام أسلوب الدعاية وتتبع كل شركة ثلاثة خطط خاصة بالحملة الدعائية وتبين المصفوفة التالية نسبة عدد الدول للشركة الأولى A .

$$\begin{array}{c} \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -13 \\ 2 & 9 & -1 & -3 \\ 3 & 17 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

أوجد الاستراتيجيات الخاصة لكل شركة مع إيجاد القيمة المثلى للمنافسة .

12 ــ قررت قيادة الجيش في الدولة A مهاجمة المصنع الحربي الرئيسي للدولة B الواقع في ضواحي عاصمتها وقد بلغ ذلك إلى علم الدولة B وعلمت أن هذا الهجوم سيكون عن طريق الإنزال الجـــوي أو الإنزال البحري إلا أن القوة العسكرية التي تمتلكها B لا تسمح لها بحشد القـــوات اللازمة لكل من الهجومين (عند B من القوات ما يكفي لصد أحد الهجومين) ولكنها تستطيع مع ذلك أن تجهز كميناً لمواجهة الهجوم الآخـــر بعد انسحابه . إن الجيش المهاجم من A يمتلك القليل من الذخيرة وقد تبينت الحقائق التالية :

إذا تلاقـــى الجيشـــان فإن جيش A سينسحب وبذلك فإن B تكســـب المعركـــة (خسائر A عندها تقدر بـــ 15 $ مليون) . وإذا لم يلتق الجيشين عند المصنع فإن جيش A ســـيصل إلى المصنع ويكبد B خسارة قدرها 200 $ مليون . هناك احتمال قدرة 0.7 بأن يصادف هذا الجيش في عودته كميناً سيكبده خسائر تقدر بـــ 100 $ مليون . في حال الإنزال الجوي و 70 $ مليون في حال الإنزال البحري . صغ هذه المسألة كمباراة ذات مجموع صغرى وأوجد الاستراتيجية المثلى لكلا الجيشين .

الجزء التالي مقتبس من كتاب: أساسيات نظرية المباريات تأليف د. زيد تميم البلخي

المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين

(3 ــ 1) مقدمة

تعرفنا أعلاه على شروط المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين وأهمها هو أن هذا النوع من المباريات يقتصر على شخصين فقط ، وأن عائد أحد الشخصين يساوي القيمة السالبة لعائد الشخص الآخر بحيث أن مجموع العائدين يساوي الصفر دوماً . وقد تعرفنا في أحــد الأمثلة أعــلاه وهو المثال (2 ــ 3) على مباراة بين شخصين ولكنها ذات مجموع غير صفري (وهو مثال السجينين المتهمين بسرقة أحد محلات المجوهرات) وكما أشرنا في الفصل السابق فإن المباريات ذات المجموع غير الصفري تبدو أكثر واقعية من المباريات ذات المجموع الصفري إلا أننا (وكما سنرى في هذا الفصل) سنحتاج للمباريات ذات المجموع الصفري عند حل المباريات ذات المجموع غير الصفري .

وتتلخص الفروق الرئيسية بين المباريات ذات المجموع الصفري ومقابلاتها ذات المجموع غير الصفري بالنقطتين التاليتين :

(i) إذا اعتبرنا عوائد كل من طرفي المباراة كما لو أنها عوائد لمباراة ذات مجموع صفري وذلك بتطبيق مبدأ أكبر الأقل (Maxmin) فإن الحل الذي نحصل عليه لا يكون بالضرورة نقطة توازن [نذكر بالتعريف (2 ــ 2)] .

(ii) إذا وجد للمباراة ذات المجموع غير الصفري أكثر من نقطة توازن فليس من الضروري أن تتساوى العوائد المتوقعة عند هذه النقاط .

وقبل الدخول في شــرح ما تعنيه هذه الفروق دعنا أولاً نذكر بتعريف نقاط التوازن لمباراة ذات مجموع غير صفري لشخصين A و B .

تعريف (3 ــ 1)

لنرمز بـــ S_A ، S_B لمجموعة الاستراتيجيات الممكنة للاعبين A و B على الترتيب . نقول عن الاستراتيجية (X^* , Y^*) أنها نقطة توازن إذا تحقق الشرط التالي :

$$e_A(X,Y^*) \le e_A(X^*,Y^*) \text{ و } e_B(X^*,Y) \le e_B(X^*,Y^*) \quad (3.1)$$

من أجل أي $X \in S_A$ و $Y \in S_B$ حيث $e_A(.\ ,\ .)$ و $e_B(.\ ,\ .)$ ترمز للعوائد المتوقعة لـــ A و B على الترتيب .

ومن الناحية العملية النقطة (X^* , Y^*) نقطة توازن للمباراة إذا لم يكن هناك حافز لأي من طرفي المباراة للتحول بمفرده من هذه النقطة لأي نقطة أخرى غيـــر (X^* , Y^*) . وسنستعرض في هذا الفصل نوعين من المباريـــات ذات المجمـــوع غيـــر الـــصفري لشخصين .

المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين وغير التعاونية
Two person nonzero noncooperative games

في هذا النوع من المباريات سيكون اهتمام كل من اللاعبين منصباً على جعل عوائده أكبر ما يمكن دون النظر إلى ما يحصل عليه اللاعب الخصم خلافاً لما هو عليه الحال في المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين حيث يسعى كل من اللاعبين إلى جعل عوائده أكبر ما يمكن وعوائد خصمه أقل ما يمكن . وفي كلا النوعين فإنه لا يوجد أي نوع من التعاون أو التنسيق أو التفاوض بين طرفي النزاع ، ولكن ثمة فروق رئيسية بينهما كما أشرنا أعلاه والتي سنوضحها فيما يلي .

(3 ــ 2) أمثلة توضيحية للفروق بين المباريات الصفرية وغير الصفرية

ملاحظة (3ــ1)

قبل إعطاء أمثلة فإننا نود الإشارة أولاً إلى أنه كقاعدة عملية لإيجاد نقاط التوازن لمباراة ذات مجموع غير صفري لشخصين والتي من الشكل 2 × 2 نقوم برسم أسهم باتجاه تزايد عوائد كل من اللاعبين A و B فتكون نقاط التقاء هذه الأسهم هى نقاط

توازن وعندما تكون المصفوفة $m \times n$ حيث m أو n أكبر من 2 فإننا نطبق القاعـدة على المصفوفات الجزئية 2×2 الناتجة .

مثال (3 ــ 1)

لنأخذ المباراة التالية بين اللاعبين A و B :

$$G = \begin{matrix} \\ \uparrow \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \overset{\rightarrow}{} \\ \begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) \\ (0,0) & (3,3) \end{bmatrix} \\ \underset{B}{\rightarrow} \end{matrix} \downarrow A$$

$$G_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad G_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{كملاعب عمود})$$

ولــ G_A نقطة سرجية هي 1 ، فمستوى أمان A هو $\upsilon_A = 1$ ولــ G_B نقطة ســرجية هي 2 فمستوى أمان B هو $\upsilon_B = 2$. فباعتماد كل من اللاعبين مبدأ أكبر الأقل كطرف مستقل عن الآخر فإن قيمة المباراة هي نقطة الأمان (1,2) s . ولكن لو لعب الطرفان الاستراتيجيتين المقابلتين كطرفين غير مستقلين أي لو قام A يلعب الاســتراتيجية A_1 وقام B يلعب الاستراتيجية B_2 فإن العائد المقابل هو (2,2) والذي يختلف عن نقطــة الأمان . كما أن نقطة التوازن الوحيدة للمباراة (3,3) تختلف عن نقطة الأمان (لاحظ أن (3,3) هي النقطة الوحيدة التي تحقق العلاقتين (3.1) وهذا ما يؤكد مضمون ما جاء في النقطة الأولى .

أما ما يخص النقطة الثانية فقد أثبت ناش عام 1951 صحة النظرية التالية .

نظرية (3 ــ 1)

في أي مباراة لشخصين ســواءً كانت ذات مجموع صفري أو غير صــفري . إذا كان عدد الاستراتيجيات الخالصة لكلا اللاعبين منتهياً فإن لهذه المباراة نقطة توازن واحدة على الأقل .

فحسب ما رأيناه في الفصل الخاص بالمباريات ذات المجموع الصفري لشخصين فإن لكل مباراة نقطة توازن واحدة على الأقل هي أحد حلول تلك المباراة كذلك فقد وجدت نقطة توازن للمباراة في مثال (3 ــ 1) أعلاه . أما تعدد نقاط التوازن واختلاف القيم المتوقعة فيوضحه المثال التالي .

مثال (3 ــ 2)

لو أخذنا المباراة :

$$G = \begin{bmatrix} (4,2) & \leftarrow & (0,0) & \leftrightarrow & (0,0) \\ \uparrow & & \downarrow & & \updownarrow \\ (0,0) & \rightarrow & (3,3) & \leftarrow & (0,0) \\ \updownarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ (0,0) & \leftrightarrow & (0.0) & \rightarrow & (2,4) \end{bmatrix}$$

وحسب ما ورد في ملاحظة (3 ــ 1) فإن كلاً من النقاط (4,2) ، (3,3) و (2,4) هي نقطة توازن للمباراة وهي تقابل الاستراتيجيات (A_1,B_1) و (A_2,B_2) و (A_3,B_3) على الترتيب . كذلك فإنه بموجب الملاحظة (3ــ1) فإن (0,0) المقابلة للاستراتيجيات (A_3,B_1) و (A_1,B_3) هي نقاط توازن لكننا نهمل هذه النقاط نظراً لأن عوائد كلا اللاعبين في كل من النقاط الثلاث السابقة أفضل من مقابلاتها في هاتين الأخيرتين (حالة هيمنة) .

ولتبرير أن كل من النقاط الثلاث الأولى هو نقطة توازن ، لنأخذ النقطة (4,2) والتي تقابل اختيار A للاستراتيجية A_1 واختيار B للاستراتيجية B_1 فلو أراد A التحول من A_1 إلى A_2 أو A_3 وبقي B على B_1 فإن عائده سيتراجع من 4 إلى 0 ولو أراد B التحول من B_1 إلى B_2 أو B_3 وبقي A على A_1 فإن عائده سيتراجع من 2 إلى 0 فلا يوجد إذاً حافز لأي من الطرفين A و B للتحول بمفرده عن (A_1, B_2) إلى أي استراتيجية أخرى الأمر الذي يبرر كون (A_1,B_1) هي نقطة توازن . ويمكن تبرير أن (A_2,B_2) و (A_3,B_3) هي نقاط توازن بطريقة مماثلة . لاحظ اختلاف العوائد عند نقاط التوازن هذا الأمر الذي يعطيها أفضلية مختلفة لدى الطرفين A و B . فمن الواضح أن A يفضل (4,2) المقابلة لـ (A_1,B_2) بينما يفضل B (2,4) المقابلة لـ(A_3, B_3) .

وفي مثل هذه الحالة قد يتوصل الطرفان A و B لاختيار نقطة التوازن التي تقود إلى حل مرضي لكل منهما وهي بالطبع النقطة (3,3) التي تقابل الاستراتيجية (A_3,B_3) .

وقد أشار شيلنج Schelling إلى مثل هذه الاستراتيجية وأعطاها اسم " استراتيجية بارزة " (Prominent) وقد يُستدل من المثالين أعلاه للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين أنه إذا وجدت نقطة توازن وحيدة للمباراة فإن هذه النقطة هي حل مناسب لهذه المباراة أما إذا وجد أكثر من نقطة توازن وكان أحدها يمثل استراتيجية بارزة فإن هذه الأخيرة قد تكون حلاً مناسباً للمباراة . ولكننا قد نصادف الكثير من المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين التي تكون نقاط توازنها ليست من النوع الذي وجدناه في المثالين أعلاه ولتوضيح ذلك نسوق المثالين التاليين :

مثال (3 ــ 3)

لو أخذنا المباراة التالية بين A و B

$$G = \begin{bmatrix} (4,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,4) \end{bmatrix}$$

فيمكننا التأكد بسهولة أن كلاً من النقطتين (4,2) و (2,4) هي نقطة توازن لهذه المباراة ومع ذلك فأي منهما لا يمثل استراتيجية بارزة فهل سيختار الطرفين الاستراتيجية (A_1, B_2) التي هي في صالح الطرف A أم سيختاران الاستراتيجية (A_2,B_2) التي هي في صالح الطرف B ؟ ويبقى الجواب في مثل هذه الحالة غير معروف .

مثال (3 ــ 4)

بالعودة إلى مثال السجينين المتهمين بسرقة أحد محلات المجوهرات فقد وجدنا أن مصفوفة المباراة هي [راجع مثال (1 ــ 2)] .

$$G = \begin{bmatrix} (-9,-9) & (-10,0) \\ (0,-10) & (-1,-1) \end{bmatrix}$$

فيمكننا التأكد بسهولة أن النقطة (-9,-9) والتي تقابل الاستراتيجية (A_1,B_1) هي نقطة التوازن الوحيدة لهذه المباراة . ومن الواضح أن هذه النقطة ليست حلاً مقنعاً للمباراة إذ أنه من الواضح بأن النقطة (-1,-1) هي أفضل لطرفي المباراة من (-9,-9) .

ملاحظة (3 ــ 2)

إن إيجاد نقاط التوازن في المباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين بموجب التعريف (3 ــ 1) قد لا يكون دوماً بالسهولة التي وجدنا فيها نقاط التوازن في جميع الأمثلة أعلاه ، وعلاوة على ذلك فإن البحث عن نقاط التوازن بموجب هذا التعريف قد لا يوصلنا إلى جميع نقاط التوازن ولتوضيح ذلك نسوق المثال التالي :

مثال (3 ــ 5)

لو أخذنا المباراة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (2,1) & \leftarrow & (1,0) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (-1,2) & \rightarrow & (3,3) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y & & 1-y \end{matrix}$$

فمن الواضح أن التعريف (3 ــ 1) والملاحظة (3 ــ 1) يدل على أن النقطتين (3,3) و (2,1) هما نقطتي توازن لهذه المباراة . والسؤال هنا : هل توجد نقاط توازن أخرى للمباراة ؟ ــ لقد أجاب سواستكا (Swastika) على جزء من هذا السؤال ، وقدم طريقة لإيجاد جميع نقاط التوازن للمباريات التي من الشكل 2×2 وذات المجموع غير الصفري لشخصين والتي سنوضحها فيما يلي :

(3ــ3) طريقة سواستيكا لإيجاد نقاط التوازن للمباريات من الشكل 2×2 :

تقوم هذه الطريقة على التحليل التالي :

بموجب التعريف (3 ــ 1) لدينا ما يلي : فبالنسبة للاعب A عليه أن يبحث عن النقطة (X^*, Y^*) التي تجعل

$$X \in S_A \text{ من أجل أي } e_A(X^*, Y^*) \geq e_A(X, Y^*)$$

ويكافيء ذلك إيجاد النقطة (X^* , Y^*) التي تجعل الدالة e_A (X , Y) أكبر ما يمكن من أجل قيمة محددة لـ Y (هي Y^*) . كذلك الأمر فإن على اللاعب B أن يبحث عن النقطة (X^* , Y^*) التي تجعل

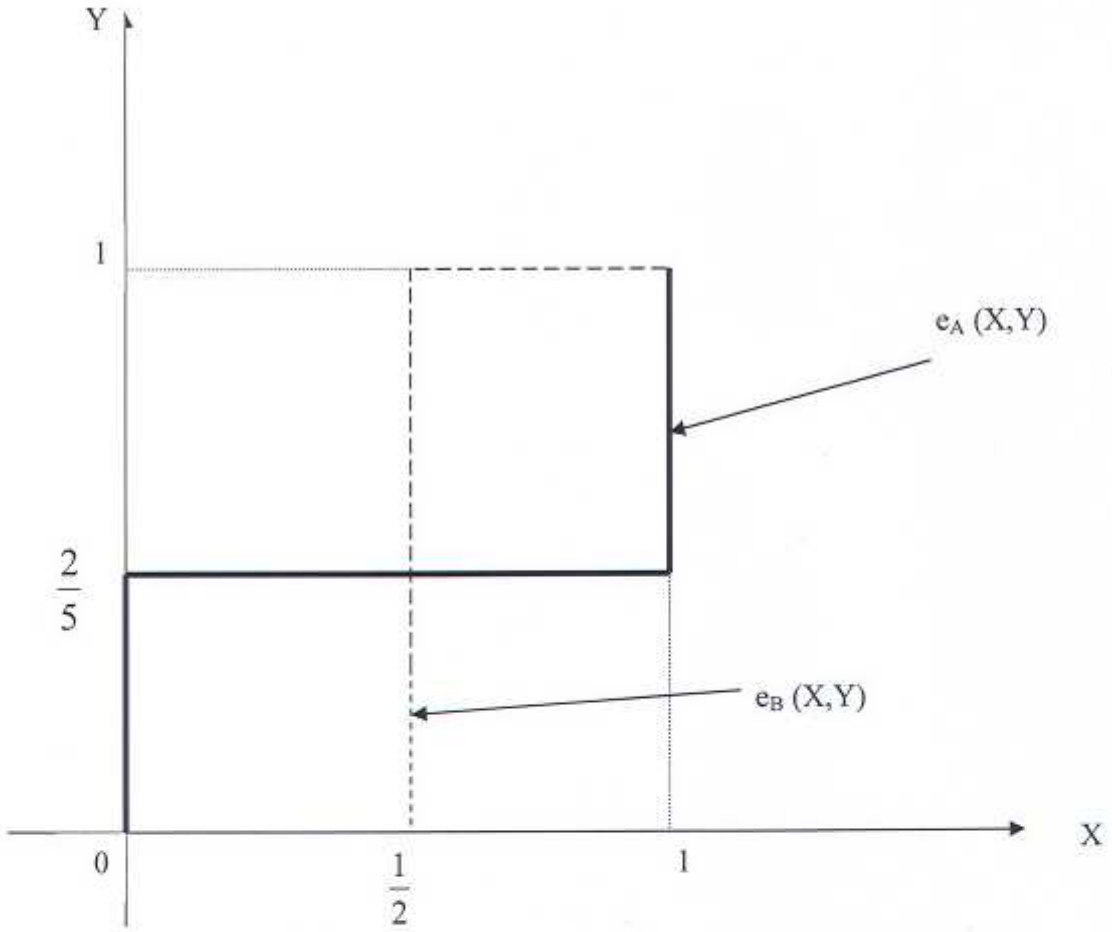
$$e_B(X^*, Y^*) \geq e_B(X, Y^*) \quad \text{من أجل أي } Y \in S_B$$

والذي يكافيء بدوره إلى إيجاد النقطة (X^* , Y^*) التي تجعل الدالة e_B (X , Y) أكبر ما يمكن من أجل قيمة محددة لـ X (هي X^*) . ولما كانت المباراة من الشكل 2×2 فإن X ستكون من الشكل X = (x, 1-x) و Y من الشكل Y = (y, 1-y) . ففي مثالنا (3 ــ 5) أعلاه نجد ما يلي :

$$\begin{aligned} e_A(x, y) &= 2xy + x(1-y) + (-1)(1-x)y + 3(1-x)(1-y) \\ &= x(5y-2) + 3 - 4y \\ e_B(x, y) &= xy + 0.x(1-y) + 2y(1-x) + 3(1-y)(1-x) \\ &= y(2x-1) + 3 - 3x \end{aligned}$$

ففي الدالة e_A (x , y) وباعتبار أن قيمة y محدودة فإن بلوغ هذه الدالة أكبر قيمة لها يتعلق بإشارة أمثال x كما يلي :

إذا كانت أمثال x سالبة أي $y < \frac{2}{5}$ فإن أكبر قيمة للدالة تقع عندما x = 0 أما إذا كانت أمثال x مساوي للصفر أي $y = \frac{2}{5}$ فإنها تبلغ قيماً كبرى متعددة من أجل أي $0 \leq x \leq 1$ أما إذا كانت أمثال x موجبة أي $y > \frac{2}{5}$ فإن الدالة تبلغ قيمتها الكبرى عندما x = 1 . وبذلك يصبح الخط البياني للدالة e_A (x,y) كما في الشكل (3ــ1) (القسم المطموس)



شكل (3 ــ 1) الدالتين e_A (X,Y) و e_B (X,Y)

وفي الدالة e_B (x,y) وباعتبار أن قيمة x محددة نجد ما يلي :

إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن هذه الدالة تبلغ أكبر قيمة لها عندما $y = 0$ وإذا كان $x = \frac{1}{2}$ فإن جميع القيم $0 \le y \le 1$ هي قيم كبرى لهذه الدالة ، أما إذا كان $x > \frac{1}{2}$ فإن الدالة تبلغ قيمتها الكبرى عندما $y = 1$. وبذلك فإن الخط البياني للدالة e_B (x,y) هو القسم المنقط المطموس في الشكل (3ــ1) . وبموجب التعريف (3ــ1) القاضي بوجوب تحقق المتباينتين (3.1) فإن نقاط تقاطع الخطين البيانيين لـــ e_A (x,y) و e_B (x,y) هي نقــاط توازن للمبــاراة G في المثال (3ــ5) وهذه النقــاط هي (0,0) ، $(\frac{1}{2},\frac{2}{5})$ ، (1,1) . أما الاستراتيجيات والعوائد المقابلة لهذه النقاط فهي على النحو التالي :

- النقطة $(x = 0 , y = 0)$ تقابل الاستراتيجية (X,Y) حيث $X = (0,1)$ و$Y = (0,1)$ والعائد المقابل هو $(3,3)$ أي أنها تقابل الاستراتيجية (A_2 , B_2) وهي ما سبق وأوجدناها مباشرة من مصفوفة العوائد .
- النقطة $(x = \frac{1}{2} , y = \frac{2}{5})$ تقابل الاستراتيجية (X,Y) حيث $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $Y = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ والعائد المقابل هو $(\frac{7}{5}, \frac{3}{2})$ فهي استراتيجية مختلطة .
- النقطة $(x = 1 , y = 1)$ تقابل الاستراتيجية (X,Y) حيث $X = (1,0)$ و$Y = (1,0)$ والعائد المقابل هو $(2,1)$ أي أنها تقابل الاستراتيجية (A_1, B_1).

ومما تجدر ملاحظته أن نقطة الأمان $s = (\frac{7}{5}, 1)$ (تحقق من ذلك) ليست أحد نقاط التوازن للمباراة G في هذا المثال .

يتضح مما سبق من الأمثلة أعلاه صعوبة إيجاد حل محدد للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين وذلك لأحد الأسباب التالية :

(أ) قد يوجد للمباراة أكثر من نقطة توازن الأمر الذي يخلق صعوبة في اختيار أحدها ، كما هي الحال في الأمثلة (3ـ2) ، (3ـ3) ، (3ـ5) .

(ب) في حال وجود نقطة توازن وحيدة للمباراة فإن هذه النقطة قد لا تكون حلاً مقنعاً كما أشرنا في المثال (3ـ4) .

وبغرض تذليل بعض الصعوبات الكامنة فيما ذكرناه من أسباب في (أ) و (ب) فقد اقترح العديد من الباحثين إضافة شروط خاصة على ما أسميناه نقاط التوازن ، وقبل ذكر هذه الشروط فإننا سنعطي بعض التعاريف المتعلقة بها .

تعريف (3ـ2)

إذا كانت (X_1,Y_1) و(X_2,Y_2) هما نقطتي توازن فإننا نقول عنهما أنها قابلتان للمبادلة (Interchangeable) فيما بينهما إذا كانت (X_1,Y_2) و(X_2,Y_1) هما أيضاً نقطتي توازن .

تعريف (3ـــ3)

نقول عن الاستراتيجية (X,Y) أنهما تهيمن (Dominates) على الاستراتيجية (X' , Y') إذا كان :

$$e_B(X,Y) \geq e_B(X',Y') \quad \text{و} \quad e_A(X,Y) \geq e_A(X',Y')$$

حيث $X, X' \in S_A$ و $Y, Y' \in S_B$ وبحيث أن أحد المتباينتين على الأقل لا يتحقق كمساواة .

تعريف (3ـــ4)

إذا كانت $X \in S_A$ و $Y \in S_B$ بحيث أنه لا توجد استراتيجية أخرى تهيمن على (X,Y) فإننا نقول عن الاستراتيجية (X,Y) أنها مثلى لباريتو (Pareto optimal) .

تعريف (3ـــ5)

نقول إن للمباراة حل بالمعنى الدقيق (Strict sense) إذا تحقق ما يلي :

(1) توجد نقطة توازن من بين النقاط المثلىلباريتو .

(2) جميع نقاط التوازن المثلى لباريتو قابلة للمبادلة ولها نفس العوائد . والحل عندئذ هو مجموعة نقاط التوازن المثلى لباريتو والتي تحقق هذين الشرطين .

وقد أوضح ناش (Nash) أن حل المباريات التي تملك مجموعة من نقاط التوازن قابلة للمبادلة يتمثل في تلك المجموعة من نقاط التوازن ، ويقال عن مثل هذه المباريات إن لها حلاً بمفهوم ناش . فمثلاً للمباراة G في مثال (3ـــ1) وللمباراة G في مثال (3ـــ4) حلاً بمفهوم ناش وذلك لأن كلاً منها لا يمتلك سوى نقطة توازن وحيدة . كذلك وبحسب النظرية (2ـــ3) فإن لجميع المباريات ذات المجموع الصفري لشخصين حلاً بمفهوم ناس ، وبالعودة إلى مثال (3ـــ1) نجد أن (3,3) التي تقابل الاستراتيجية (A_2 , B_2) هي الوحيدة التي تتصف بأنها مثلى لباريتو ولذا فإن هذه المبـــاراة حل بالمعنى الدقيق هو (3,3) . أما في المثال (3ـــ3) فمع أن نقاط التوازن (4,2) و(2,4) هي مثلى لباريتو إلا أنها غير قابلة للمبادلة فلا يوجد بالتالي حل لهذه المباراة بالمعنى الدقيق . كذلك فإن المباراة في المثال (3ـــ4) لا تملك حلاً بالمعنى

الدقيق وذلك لأن الاستراتيجية المقابلة للنقطة (1-,1-) تهيمن على الاستراتيجية المقابلة للنقطة (9-,9-) مع أن هذه الأخيرة هي مثلى لباريتو .

كما نلاحظ فإن الاقتراحات أعلاه لم توصلنا إلى حل جذري لمشكلة تعدد نقاط التوازن للمباريات ذات المجموع غير الصفري ولكن ثمة مقترح آخر يسعى إلى تذليل أكبر للصعوبات المتعلقة بمثل هذه المشكلة ويتمثل هذا المقترح بعملية الوصول إلى مباراة مختصرة للمباراة الأصلية وذلك باستخدام فكرة الهيمنة بين الاستراتيجيات المتعلقة بكل لاعب على حدة كما عرفناها في الفقرة (2ـ4) وبالتتابع أي أننا نبدأ باللاعب الأول ثم بالثاني ثم بالأول ثم بالثاني وهكذا حتى نصل إلى مباراة غير قابلة للاختصار . فمثلاً لو أخـذنا المباراة G في المثال (3ـ1) نجد أن لكلا اللاعبين A وB اسـتراتيجيتين ممكنتين ، نقوم أولاً باختصار استراتيجيات اللاعب A التي يلعبها مقابل استراتيجيات اللاعب B فنجد أن ذلك غير ممكن ثم نقوم باختصار استراتيجيات اللاعب B مقابل استراتيجيات اللاعب A فنجد المباراة المختصرة :

$$G_2 = \begin{bmatrix} (2,2) \\ (3,3) \end{bmatrix}$$

لو قـمنا الآن باختصـار المبـاراة G_2 لـ A مقـابل B نحصـل على المبـاراة $G_3 = [(3,3)]$ حيث لا يمكننا اختصار G_3 أكثر من ذلك . وسنطلق اسم " أقل مباراة مختصرة " على المباراة G_3 ومثيلاتها ، ولدينا في هذا الصدد ما يلي :

تعريف (3ـ6)

نقول إن للمباراة ذات المجموع غير الصفري لشخصين حلاً بالمعنى العام إذا كان لأقل مباراة مختصرة منها حلاً بالمعنى الدقيق ومجموعة الحلول بالمعنى العام للمباراة الأصلية هي عندئذٍ مجموعة الحلول الدقيقة لأقل مباراة مختصرة منها .

وبموجب هذا التعريف فإن النقطة (3,3) المقابلة للاستراتيجية (A_2, B_2) هي حل بالمعنى العام للمباراة G في مثال (3ـ1) كما أن النقطة (9-,9-) المقابلة

للاســـتراتيجية (A_1, B_1) هي أيضاً حـــل بالمعنى العام للمباراة G في مثال (3ــ4) (لاحظ أن المباراة G في مثال (3ــ4) يمكن اختصارها بالتتابع إلى

$$G_2 = \begin{bmatrix} (-9,-9) \\ (0,-10) \end{bmatrix}$$

ثم إلى $G_3 = [\ (-9,-9)\ ]$ والتي تملك الحل (-9,-9) بالمعنى الدقيق) . أما المباراة G في مثال (3ــ3) فهي غير قابلة للاختصار وقد بينا أعلاه عدم وجود حل لهذه المباراة بالمعنى الدقيق فليس لها بالتالي حل بالمعنى العام .

المباريات التعاونية (التفاوضية)
Cooperative Games

بالعودة إلى مثال (3ـ4) (مثال السجينين المتهمين بسرقة أحد محلات المجوهرات) فقد وجدنا أن النقطة (-9,-9) والتي تقابل الاستراتيجية (A_1 , B_1) (أي كلاهما يعترف بالسرقة) هي نقطة التوازن الوحيدة للمباراة ، وقد أشرنا أن هذا الحل غير مقنع لطرفي المباراة إذ أن النقطة (-1 , -1) والتي تقابل الاستراتيجية (A_2 , B_2) أي عدم الاعتراف لكل منهما هي أفضل . ومن الواضح أنه لم يكن بالإمكان الوصول إلى مثل هذه الاستراتيجية إلا بالتنسيق والتعاون بين السجينين . ولمزيد من الإيضاح لايجابيات التعاون بين أطراف النزاع والتي تستلزم عمليات تفاوضية تستند إلى معايير مختلفة نسوق المثال التالي والذي سندرسه بشيء من التفصيل .

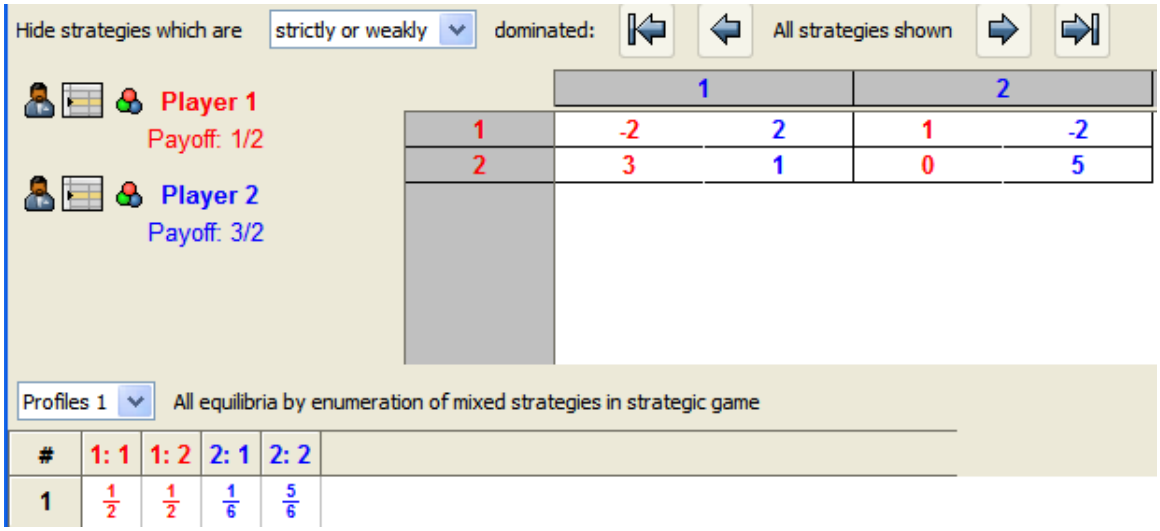
مثال (3 ــ 6)

تتنافس شركتان A و B لأجهزة الهاتف الجوال على تسويق الاشتراكات لدى إحدى الدول . ولكل من الشركتين استراتيجيتين ممكنتين للتسويق ، وقد تبين لكل منها أن العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة تعطي كما في المصفوفة التالية (الأرقـــام بمليارات الدولارات) .

$$G = \begin{bmatrix} (-2\,,\,2) & (1\,,\,-2) \\ (3\,,\,1) & (0\,,\,5) \end{bmatrix}$$

مثلاً العائد (1 , 3) يعني أنه لو أُستخدمت الاستراتيجية (A_2 , B_1) فإن الشركة A تربح 3 مليارات دولار بينما تربح الشركة B مليار دولار .

كما هو ملاحظ فإنه باستثناء العوائد المقابلة للاستراتيجية (A_1 , B_1) فإن مجموع العوائد المقابلة لكل استراتيجية ليس صفراً ، كما أنه لا توجد لهذه المباراة نقطة توازن يمكن إيجادها مباشرة من المباراة إلا أن طريقة سواستكا ستقود إلى نقطة التوازن الوحـــيدة (X^*,Y^*) حيث $X^* = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ، $Y^* = (\frac{1}{6},\frac{5}{6})$ والتي تقود إلى العائد $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ (تحقق من ذلك) . والسؤال الآن ما هي الاستراتيجية المثلى لكل من الشركتين ؟



وللإجابة :

نلاحظ أن أي من الشركتين لن يقبل أن تستخدم الأخرى إحدى الاستراتيجيات الأربعة المقابلة للعوائد الأربع المعطاة في المصفوفة G ويعود السبب في ذلك إلى التحليل التالي :

لو قامت الشركة B باستخدام الاستراتيجية (A_1 , B_1) فإن ذلك سيؤدي إلى خسارة كبيرة للشركة A وكذلك لو قامت الشركة B باستخدام الاستراتيجية (A_2 , B_2)فإن ذلك سيحرم الشركة A من أي ربح . وبالمقابل فـإنه لو قامت الشركة A باستخدام الاستراتيجية (A_1 , B_2) فسيؤدي ذلك إلى خسارة كبيرة للشركة B ولو قامت A باستخدام الاستراتيجية (A_2 , B_1) فسيؤدي ذلك إلىٰ تقليل أرباح الشركة B . وينظر إلى مثل هذه الاستراتيجيات التي تقود إلى ربح أحد اللاعبين وخسـارة الأخر أو تلك التي تؤدي إلى ربح أكبر لأحـد اللاعبين وربح أقـل بكثير للاعب الأخـر بأنها استراتيجيات تهديدية (Threat Strategies) . ولذا فـإنه في مثل هـذا النوع من المباريات (ذات المجموع غير الصفري) يكون من المنطقي أن يكـون هناك تفاوض أو مسـاومة (Bargaing) بين اللاعبين لمصلحتهما المشتركة حيث يطمح كل من اللاعبين عندئذ بالحصول على عائد أفضل ولذا فإنه يطلق على هذا النوع من المباريات أيضاً اسم " المباريات التفاوضية " . وتثير عملية التفاوض هذه سؤالاً آخر هو ؟

ما دمنا سنتفاوض فمن أي نقطة (أو على أي أساس) نبدأ التفاوض ؟

للإجابة :

نعرّف أولاً النقطة التي تبنى عليها عملية التفاوض بأنها " نقطة الوضع الراهن " (Status Quo Point) . وهناك عدة إمكانيات لنقطة الوضع الراهن . فقد يصرّ أحد اللاعبين استخدام ما أسميناه " استراتيجية تهديدية " وعندئذ تكون هذه الاستراتيجية التهديدية هي نقطة الوضع الراهن مع ما لهذه النقطة من مخاطر على أحد اللاعبين ولذا فقد لا يفضل أي من اللاعبين أن يختار هذه النقطة كأساس للتفاوض . وما هـو منطقي لكلا اللاعبين في هذه الحالة أن ينطلق اللاعبان من نقطة لا يمكن لأي منهما أن يحصل على عائد أقل من العائد في هذه النقطة . ويطلق على مثل هذه النقطة اسم " نقطة الأمـان " (Security Point) والفلسفة القائمة وراء اختيار نقطة الأمـان هذه كأساس للتفاوض هو " أن يعتبر كل من اللاعبين العوائد التي يحصل عليها كما لو أنها عوائد للعبة ذات مجموع صفري " ثم يحسـب قيمة المباراة الناتجة فعندئذ تكون قيمة هذه المباراة هي أقل ما يمكن أن يحصل عليه هذا اللاعب مهما كانت الاستراتيجية التي ينتهجها اللاعب الأخر . ففي مثالنا أعـلاه فـإن عـوائد االلاعبين (الشـركتين) A و B تعطيان بالمصفوفتين G_A , G_B التاليتين على الترتيب :

$$G_B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad G_A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3/6 \\ 3/6 \end{matrix}$$

ولإجراء الحسابات المتعلقة بـ G_B لابد من أخذ منقول G_B أي :

$$G_B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7/8 \\ 1/8 \end{matrix}$$

وذلك لجعل اللاعب B كما لو أنه يلعب مباراة ذات مجموع صفري ونوجد قيمة المباراة الخاصة به من المصفوفة G_B^t وليس من المصفوفة G_B . ويمكننا كذلك إيجاد قيمة المباراة G_B بأن نأخذ min على الأعمدة و max على الأسطر كما يلي :

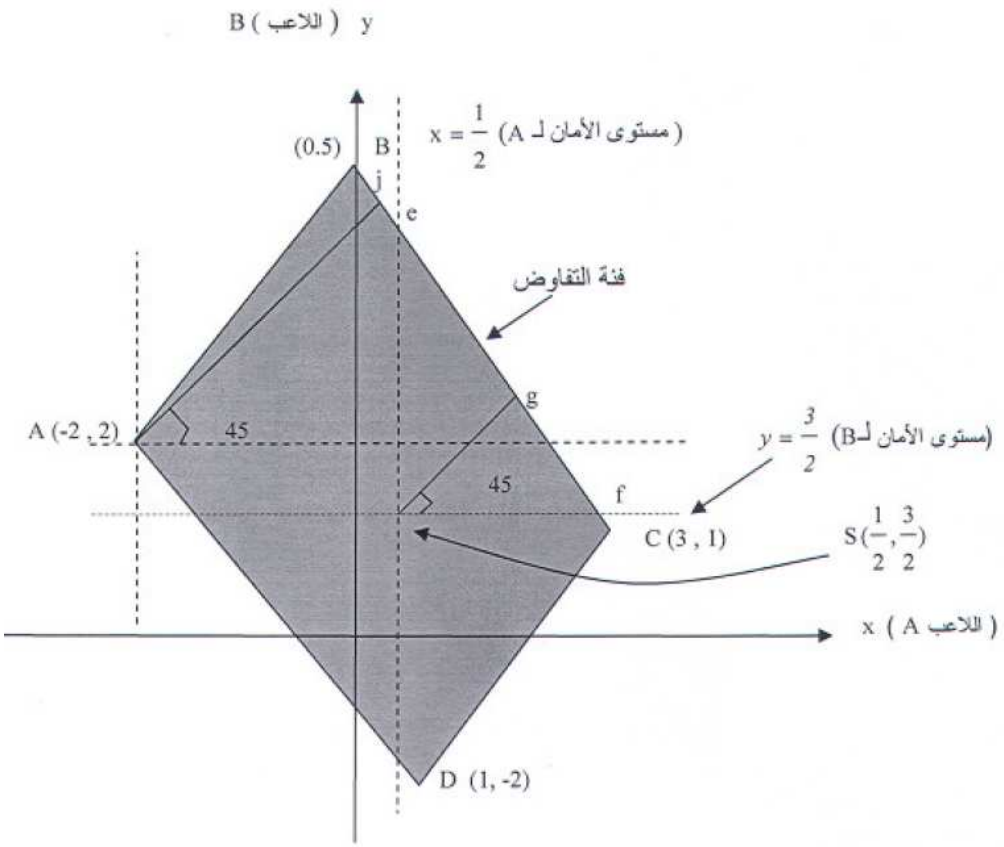
			Max
	2	-2	2
	1	5	3
Min	1	-2	

ولا توجـــد لأي من المصفوفتين نقطة سرجية وبإجراء الحسابات نجد أن قيم المباراتين (ذات المجموع الصفري) الممثلتين بالمصفوفتين G_A , G_B^t هو $\upsilon_A = \frac{1}{2}$ و $\upsilon_B = \frac{3}{2}$ على الترتيب وبذلك فإن نقطة الأمان للشركتين هي $s\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ والتي تعني أن اللاعب A لن يقبل بأي استراتيجية تجعل عائده أقل من $\frac{1}{2}$. كما أن اللاعب B لن يقبل بأي استراتيجية تجعل عائده أقل من $\frac{3}{2}$ كذلك فقد اصطلح على تسمية القيمة $\upsilon_A = \frac{1}{2}$ مستوى الأمان (Security Level) للاعب A وعلى القيمة $\upsilon_B = \frac{3}{2}$ مستوى الأمـــان للاعب B . (لاحـــظ أن النقطة $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ هي نقطـــة توازن للمبـــاراة وأنها تقـــابل استراتيجية مختلطة كما وجدنا أعلاه مع أن هذا الأمر قد لا يقع في الكثير من المباريات كما أشرنا في الفرق الرئيس (i) في مطلع هذا الفصل) .

التمثيل البياني للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين

بملاحظة أن نقطة الأمان $s\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ هي استراتيجية مختلطة وللسماح بإمكانية إيجاد جميع الاستراتيجيات (الخالصة والمختلطة) فقد اصطلح على تمثيل العوائد (الثنائيات) المقابلة للاستراتيجيات المختلفة في مستوى ذي محورين متعامدين نظاميين فنحصل بذلك على مضلع يطلق عليه مضلع المباراة (Game Polygon) أو مضلع العوائد (Payoff Polygon) حيث تعتبر كل النقاط الواقعة داخل هذا المضلع وعلى محيطه ممثلة لجميع الاستراتيجيات الممكنة (البحتة والمختلطة) للاعبين . لذا نحرص في هذه التمثيل أن يكون المضلع الناتج هو مجموعة محدبة (Convex Set) ولمزيد من المعلومات حول المجموعات المحدبة والمصفوفات راجع " الملحق " في نهاية هذا الكتاب " .

ففي مثال الشركتين A و B أعلاه فإن مضلع العوائد يعطي كما في الشكل (3 – 2) .



شكل (3 ــ 2) مضلع العوائد لمثال (3 ــ 6)

فمضلع العوائد هو داخل ومحيط المضلع ABCD الشكل (3 ــ 6) .

كما نلاحظ فإن هذا المضلع هو مجموعة محدبة ويعني ذلك أن أي نقطة في داخل المضلع (كنقطة الأمان) أو على محيطه يمكن تمثيلها كعبارة محدبة في استراتيجيتين خالصـــتين أو مختلطتين أو إحدهما خالصة والأخرى مختلطة . (لمزيد من المعرفة حول العبارات المحدبة راجع " الملحق " في نهاية الكتاب) .

أما مستويات الأمان فيمكن تمثيلها على هذا المضلع بالمستقيمين (المنقطين)

$x=\frac{1}{2}$ (المستقيم الذي يمثل مستوى الأمان للشركة A) .

$y=\frac{3}{2}$ (المستقيم الذي يمثل مستوى الأمان للشركة B) .

فئة التفاوض

تعرف فئة التفاوض بشكل عام بأنها أي مجموعة جزئية من مضلع العوائد يمكن للاعبين أن يختاروا منها استراتيجية تعطي عوائد مقبولة لدى طرفي النزاع . وبشكل عام أيضاً فإن لهذه الفئة علاقة بما أسميناه نقطة الوضع الراهن . وسنوضح ذلك من خلال المثال (3 ــ 6) . إن اللاعب (الشركة) A يطمح بأن يحصل على استراتيجية تقع على يمين المستقيم $x=\frac{1}{2}$ كما أن اللاعب (الشركة) B يطمح بأن يحصل على استراتيجية فوق المستقيم $y=\frac{3}{2}$. أي أن الشركتين تطمحان بأن تحصلا على استراتيجية ضمن المثلث sef (وهو جـــزء من مضلع العوائد) حيث s هي نقطة الأمان و e هي نقطة تقاطع مستوى أمان A $(x=\frac{1}{2})$ مع حدود مضلع العوائد و f هي نقطة تقاطع مستوى أمان B $(y=\frac{3}{2})$ مع حدود مضلع العوائد .

وكما هو ملاحظ فإن أفضل الاستراتيجيات في هذا المثلث و لكـــلا الشركتين هي التي تكون أبعد ما يمكن لأي منهما عن مستوى أمانة دون أن يؤدي ذلك إلى الأضرار بعائدات اللاعب (الشركة) المنافس .

إذاً فأفضل الاستراتيجيات للشركتين تقع على القطعة ef .

وتسمى الاستراتيجيات الممثلة بنقاط القطعة المستقيمة ef باسم :

- مجموعة التفاوض (Negotiation set) أو
- فئة التفاوض (Negotiation Category)

ونقوم عادة بتعليم فئة التفاوض على مضلع العوائد أو بطمسها .

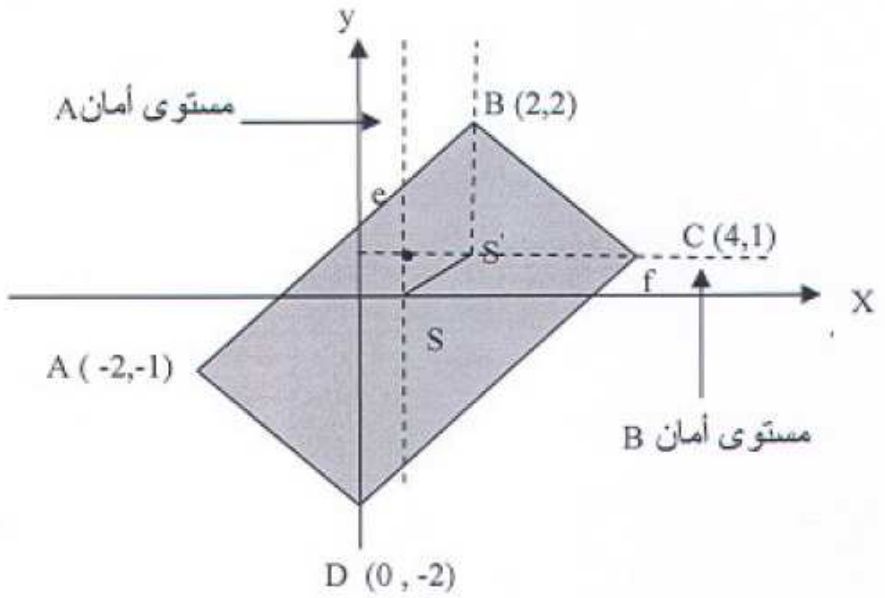
ومن الواضح أن أي نقطة بين e و f (غير e وغير f) تمثل استراتيجية عائدها لكل من الشركتين أفضل من مستوى الأمان لهذه الشركة .

وما يجب ملاحظته بالنسبة لفئة التفاوض هذه أن أي محاولة من أي منهما لزيادة عائداته (مستوى أمانة) سيغير من فئة التفاوض الأمر الذي يعني ضرورة ملاحظة مثل هذا الأمر لدى اختيار فئة التفاوض ، ولتوضيح هذه النقطة الأخيرة نورد المثالين التاليين .

مثال

لدينا المباراة (ذات المجموع غير الصفري) التالية للاعبين A و B .

$$G = \begin{bmatrix} (0\ ,\ -2) & (2\ ,\ 2) \\ (4\ ,\ 1) & (-2\ ,\ -1) \end{bmatrix}$$



شكل (3 ــ 3)

المطلوب تحديد كلاً من مستوى الأمان ، وفئة التفاوض للاعبين .

الحـــــل

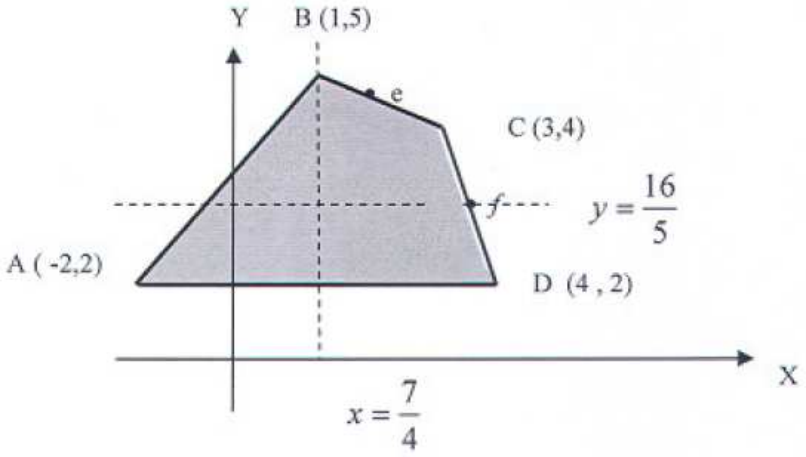
إن مضلع العـــوائد هـــو داخـــل ومحيـــط المضلـــع ABCD الموضح بالشكل (3 ــ 3) . ويمكننا التحقق أن نقطة الأمان هي النقطة s (1,0) .

وبذلك فإن مستوى أمان A هو $x = 1$ ومســـتوى أمان B هو $y = 0$. ولتحـــديد فئة التفاوض نلاحظ أنها ممثلة بالقعطة المستقيمة BC فقط وذلك لأن هناك إمكانية للاعب A أن يتحرك على eB وللاعب B أن يتحرك على f C دون أن يضر أحدهما بالآخر ولذا فلا تدخل هاتين القطعتين في فئة التفاوض . فلا يضر أحدهما الآخر وذلك بسبب الحالة التناظرية للاعبين المتمثلة بتوازي القطعتين eB و fC . وعلى العكس فإن مثل هذا الأضرار سيحصل فيما لو تم التفريـــط بأي جزء من القطعة BC . لاحظ أن حركة A على eB و B على fC معاً توصلا هما إلى النقطة (1,2) 's حيث تزيد عائدات كل منهما بمقدار 1 .

مثال

أوجـد مستوى الأمان وفئة التفاوض للمباراة ذات المجموع غير الصفري التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (-2\,,\,2) & (1\,,\,5) \\ (3\,,\,4) & (4\,,\,2) \end{bmatrix}$$



شكل (3 ــ 4)

الحـــــل

إن مضلع العوائد هو داخل ومحيط المضلع ABCD شكل (3 ــ 4) .

وبحساب قيم المباريات الصفرية لكلا اللاعبين نجد أن مستوى الأمـــان للاعب A هو $x = \frac{7}{4}$ ومستوى الأمان للاعب B هو $y = \frac{16}{5}$ الموضحان على الشكل (3 ــ 4) .

وفي هذه الحالة فإن فئة التفاوض تتألف من القطعتين eC و Cf لأنهما الجزء الأبعد من مضلع العوائد .

وهناك شرطان أساسيان يجب أن يتوافرا في فئة التفاوض هما :

شرط (1) : لا يمكن للاعبين زيـــادة عائداتهما في نفس القيمة إذا انتقلنا من نقطة لأخرى بين نقاط فئة التفاوض .

شرط (2) : يجب ألا يقل مستوى العائدات لأي من اللاعبين عند أي نقطة من نقاط فئة التفاوض عن مستوى أمانة .

نقطة الوضع الراهن

ألمحنا أعلاه أن نقطة الوضع الراهن قد تكون أي استراتيجية تهديدية أو أنها قد تكون نقطة الأمـــان . وبعد أن تعرفنا على ما أسميناه مضلع العوائد نعّرف " نقطة الوضع الراهن " بشكل أعم بأنها " أي نقطة من مضلع العوائد " . وكما هو واضح من اسمها بأن هذه النقطة يجب أن تعكس الوضع الراهن للاعبين أي أنها يجب أن تعكس الوضع التفاوضي لكلا اللاعبين كأن يكون أحدهما في مركز أقوى من الأخر . ويرى البعض أن تكون هذه النقطة هي " الحد الأدنى المقبول لكلا الطرفين " كما يرى آخرون أن " نقطة الأمان " هي نقطة مناسبة كأساس للتفاوض وذلك لأنها تأخذ بعين الاعتبار كل العوائد في مصفوفة المباراة عند حسابها .

الاستراتيجية التهديدية المثلى

بالعودة إلى مثال (3 ــ 6) فقـــد ذكـــــرنا أن لكل من اللاعبين استراتيجياته التهديدية الخاصة به . والسؤال الآن : لو أصرّ أحد اللاعبين على استخدام استراتيجية تهديدية فما هي الاستراتيجية التهديدية المثلى لهذا اللاعب ؟

قبل الإجابة يجب التنويه إلى أن الاستراتيجية التهديدية المثلى لأي من اللاعبين قد تكون إحدى الاستراتيجيات البحتة أو أنها استراتيجية مختلطة . وتتلخص عملية إيجاد مثل هذه الاستراتيجية المثلى للمباريات ذات المجموع غير الصفري للاعبين بما يلي :

1 ــ إذا أردنا إيجاد الاستراتيجية التهديدية المثلي للاعب A (للاعب B) فإننا نطرح عوائد اللاعب B (اللاعب A) من مقابلاتها لـ A (لـ B) في مصفوفة المباراة ذات المجموع غير الصفري ونضع النواتج في أماكنها بنفس الترتيب لتعطينا بذلك مصفوفة خاصة بـ A (خاصة بـ B) .

2 ــ نعتبر المصفوفة الخاصة بـ A (الخاصة بـ B) كما لو أنها مصفوفة خاصة بمباراة ذات مجموع صفري ثم نوجد الحل الأمثل هذه الأخيرة .

3 ــ نستنتج المباراة التهديدية المثلى للاعب A (للاعب B) من الحل الأمثل الذي حصلنا عليه في (2) .

فبالعودة إلى مثالنا (3 ــ 6) يمكننا إيجاد الاستراتيجية التهديدية المثلى لـ A كما يلي : بعد طرح عائدات B من مقالابتها لـ A نحصل على المصفوفة التالية :

$$G_A^T = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}$$

وليس لهذه المباراة الصفرية نقطة سرجية وحلها هو الاستراتيجية المختلطة (A_1 , A_2) بالاحتمالات $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

وتعني هذه النتيجة أن على اللاعب A (الشركة) أن يلعب (أن تطبق) كـــلاً من استراتيجياتها الاثنتين A_2 , A_1 نصف العدد من المرات والتي تمثل له (لها) أفضـــل استراتيجية تهديدية للاعب (الشركة) B .

أما بالنسبة للاعب (الشركة) B فنحصل على المباراة الصفرية التالية :

$$G_B^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & \text{Max} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Min} & -2 & -3 \end{matrix} \end{array}$$

وكذلك ليس لهذه المباراة نقطة سرجية وحلها هو الاستراتيجية المختلطـــة (B_1 , B_2) بالاحتمالات $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ والتي تعني أن أفضل استراتيجية تهديدية للاعب (الشركة) B هو أن يلعب (أن تطبق) استراتيجيته الأولى B_1 , $\frac{1}{2}$ المرات ويلعـــب اســـتراتيجيته الثانية B_2 , $\frac{1}{2}$ المرات .

ثمة خطوات ضرورية لا بد من تنفيذها في أي عملية تفاوضـــية تستند على استراتيجية تهديدية وهي ما يطلق عليه الشروط الضرورية لتنفيذ الاستراتيجيات التهديدية وهي :

1 ــ أن يعلن الطرف A (الطرف B) عن استراتيجيته التهديدية T_A (T_B) .
2 ــ أن يتجاهل الطـــرف B (الطرف A) استراتيجية A (استراتيجية B) التهديدية ويعلن استراتيجيته الخاصة به وهي T_B (T_A) .
3 ــ نظراً لتهديد كل من طرفي النزاع للأخر فإنهما يبدأن عملية التفـــاوض فإما أن يتوصلا إلى اتفاق أو أن يقوم كل منهما بتنفيذ استراتيجيته التهديدية .

سنتعرف الآن على طرق الحل المتنوعة للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين ولكننا سنورد أولاً الملاحظة الهامة التالية :

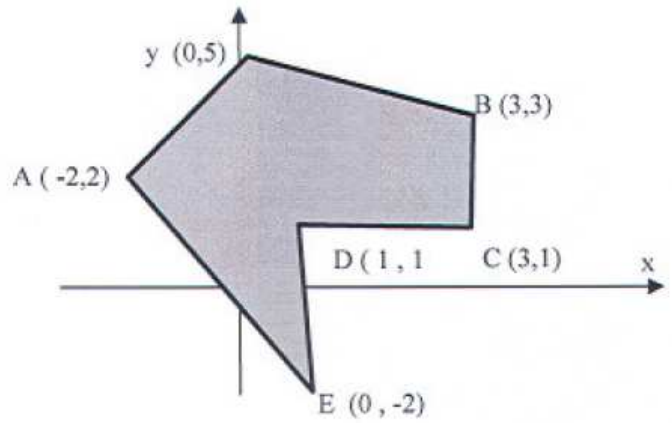
ملاحظة

ألمحنا أعلاه على أنه لدى تمثيل مضلع العوائد بيانياً فعلينا أن نحرص على أن يكون هذا المضلع هو مجموعة محدبة ويعود السبب في ذلك إلى أن مثل هذا التمثيل يتيح إمكانية الحصـــول على أي استراتيجية مختلطة أو بحته من أي استراتيجيتين ممكنتين لطرفي النزاع ، وذلك من خلال التعبير عن الأخيرة كعبارة محدبة في هاتين الاستراتيجيتين . وسنوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال

إذا أخذنا المباراة ذات المجموع غير الصفري الممثلة بالمصفوفة G أدناه نجد أنه يمكننا تمثيل مضلع العوائد كما في الشكل (3 ــ 5) وهو داخل ومحيط المضلع ABCDE .

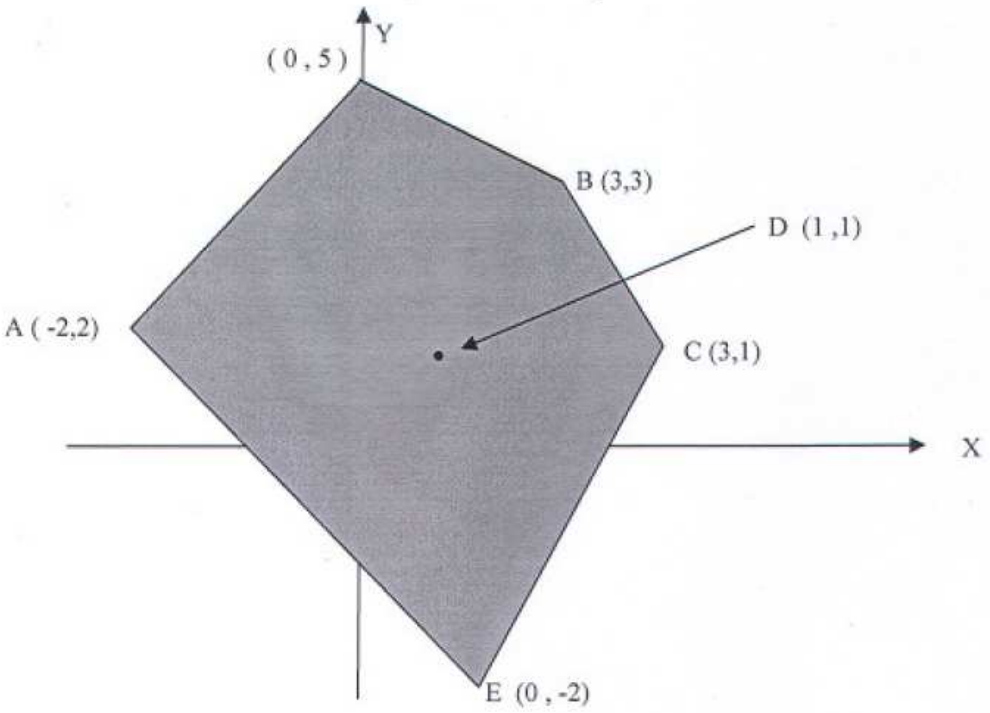
$$G = \begin{bmatrix} (0,5) & (-2,2) & (3,3) \\ (1,-2) & (3,1) & (1,1) \end{bmatrix}$$



شكل (3 ــ 5)

لكن المضلع ABCDE ليس مجموعة محدبة وفي هذه الحالة نجد أن أي استراتيجية بين C و E ليست من مضلع العوائد كما أن أي استراتيجية مختلطة بين أي نقطة من DC وأي نقطة من DE هي أيضاً خارج مضلع العوائد .

في مثل هذه الحالة نقوم بإضافة المثلث CDE إلى مضلع العوائد ليصبح مضلع العوائد الصحيح هو محيط وداخل المضلع ABCE حيث تصبح الاستراتيجية (1,1) D نقطة داخلية في هذا المضلع [الشكل (3 ــ 6)] . وهذا الأمر لا يغير من إمكانية الحصول على جميع الاستراتيجيات البحته والمختلطة الممكنة لطرفي النزاع .



شكل (3 ــ 6) تصحيح الوضع لشكل (3 ــ 5)

(3 ــ 5) بعض طرق حل المباريات التفاوضية ذات المجموع غير الصفري لشخصين .

نشير أولاً إلى أن اســم " المباريات التفاوضية " يطلق على مباريات الشخصين ذات المجموع غير الصــفري ذلك أن التفاوض قد يلعب دوراً (في حال عدم وجود استراتيجية تهديدية) في تحديد نقطة الوضع الراهن والذي يؤدي بدوره إلى تحديد فئة التفاوض . وهناك العديد من الطــرق التي تم اقتراحها لحــل المباريات التفاوضية نتعرف فيما يلي على بعض منها ونود التأكيد هنا إلى أنه قبل الشــروع في تطبيق أي من هذه الطرق فلا بد لنا أولاً من تحديد نقطة الوضع الراهن وفئة التفاوض بدقة .

طريقة الأمثلية الكلية

تشتق هذه الطريقة اسمها من أن الهدف فيها هو " جعل العائد الكلي للشخصين المتباريين أكبر ما يمكن " دون النظر إلى العائد الشخصي لكل منهما . ومن الواضح أن هذا الهــدف يتحقق (بشــكل عام) عند نقطة من نقاط فئة التفاوض . فبالعودة إلى مثال (3 ــ 6) للشركتين A وB المتنافستين على تسويق أجهزة الجوالات في أحد البلدان نجد أن معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0,5) B و (3,1) C والذي تقع عليه فئة التفاوض ef هي :

$$\frac{y-1}{x-3}=\frac{5-1}{0-3} \quad \text{أو} \quad y=\frac{-4}{3}x+5$$

ومنها نجــد إحــداثيات e من أجل $x=\frac{1}{2}$ وإحداثيات f من أجل $y=\frac{2}{3}$ فنجد

$$e\left(\frac{1}{2},\frac{13}{3}\right),\ f\left(\frac{21}{8},\frac{3}{2}\right)$$

ومنها نجد أن مجموع إحــداثيات e (= مجمــوع عائدات A و B عند e) يســاوي

$$\frac{29}{6}=\frac{1}{2}+\frac{13}{3}=4.83 \ .$$

وأن مجموع إحــــداثيات f (= مجمــوع عائدات A وB عند f) يســاوي

$$\frac{33}{8}=\frac{21}{8}+\frac{3}{2}=4.125 \ .$$

وبذلك فإن النقطة e تجعل مجموع العائدات الكلي لطرفي النزاع أكبر ما يمكن ، ولذا ووفقاً لهذه الطريقة فإن النقطة e تمثل الحل الأمثل .

والحل الأمثل هنا هو إيجاد الاستراتيجية المختلطة التي تجعل عائدات A تساوي $\frac{1}{2}$ وعائدات B تساوي $\frac{13}{3}$. وهذه الاستراتيجية هي تركيب محدب أو عبارة محدبة للاستراتيجيتين الخالصتين B (0 , 5) و C (3 , 1) حيث يتعين علينا إيجاد قيمة λ بين الصفر والواحد التي يكون من أجلها e = $\lambda B + (1-\lambda)$ C والتي تكافئ

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1-\lambda) \\ 5\lambda+1(1-\lambda) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3-3\lambda=\frac{1}{2} \\ 4\lambda+1=\frac{13}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{6}$$

وتعني هذه النتيجة أن على اللاعبين (الشركيتين) أن يلعبا (يطبقا) الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{5}{6}\text{ B} , \frac{1}{6}\text{ C}\right)$ ليحصلا على الاستراتيجية e التي تمثل الحل الأمثل عند تطبيق طريقة الأمثلية الكلية .

لاحظ أن أحد المحاذير الهامة لهذه الطريقة هو أنها تبقى عوائد أحد طرفي النزاع على حاله ذلك أن الحل الأمثل هنا يتمثل في أحد النقاط الطرفية لفئة التفاوض ففي مثالنا أعلاه بقيت عوائد اللاعب A على حالها بينما ارتفعت عوائد اللاعب B من $\frac{3}{2}$ إلى $\frac{13}{3} = 4.33$ ، ولذا ولحث المتنافسين على قبول هذا الحل فقد اتفق على أنه وبعد القبول في هذا الحل فلا بد من إجراء نوع من المساومة (Bargaining) مع الطرف الذي يحقق المكاسب الأكبر وذلك للتنازل لغريمه عن جزء من عوائده حيث يتم الاتفاق عليه بين الطرفين كصفقة جانبية ، ولكن طريقة الأمثلية الكلية لا تمكن طرفي النزاع من حساب قيمة هذه الصفقة . ثمة نوع أخر من المحاذير هو أن يكون مجموع عوائد اللاعبين عند طرفي فئة التفاوض (وذلك عندما تكون هذه الفئة هي قطعة مستقيمة واحدة) هي نفسها فمثلاً لو أخذنا المباراة ذات المجموع غير الصفري التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (4\ ,\ 1) & (\frac{-4}{3},4) \\ (-3\ ,\ 1) & (1\ ,\ 4) \end{bmatrix}$$

فيمكننا التحقق بسهولة أن مستويات الأمان هي $x=\frac{1}{2}$ للاعب A و $y=0$ وأن فئة التفاوض هي القطعة BC حيث (1,4)B و C(4,1) وكما هو ملاحظ فإن المجموع الكلي للعائدات عند كل من B و C هو نفسه ويساوي 5 . وبالطبع فإن أي نقطة بين B و C تعطي نفس هذا المجموع (أي 5) ولذا فإن طريقة الأمثلية الكلية لا تساعد في اختيار حل تفاوضي محدد في مثل هذه الحالات .

طريقة منصف الربع الأول لنقطة الوضع الراهن

بعد رسم مضلع العوائد وتحديد نقطة الوضع الراهن وفئة التفاوض فإننا نرسم المستقيمين $x=\upsilon_A$, $y=\upsilon_B$ من نقطة الوضع الراهن (التي تم الاتفاق عليها) فتتحدد بذلك فئة التفاوض على حدود مضلع العوائد . ثم نرسم مستقيماً يصنع زاوية 45° مع كل من هذين المستقيمين أي منصف الربع الأول لهذين المستقيمين ، ونحدد نقطة تقاطع هذا المنصف مع فئة التفاوض . فيكون الحل الأمثل ممثلاً بهذه النقطة ولايضاح ذلك نعود إلى مثال (3ـ6) الخاص بالشركتين A , B ولنحل المسألة في حالتين :

أ ـ نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان $s(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

وجدنا عندها أن فئة التفاوض هي القطعة ef فلو رسمنا منصفاً للربع الأول للمستقيمين $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$ [انظر الشكل (3ـ2)] نجد أنه يقطع فئة التفاوض في النقطة g الواقعة بين f , e (وهي تقع كذلك بين C , B) فالحل الأمثل يتمثل في النقطة g (وفقاً لهذه الطريقة) ولإيجاد الحل الأمثل لابد لنا من إيجاد إحداثيات g ويتم ذلك بحل معادلتي المستقيمين BC و sg . فقد وجدنا أعلاه أن معادلة BC هي $y=\frac{-4}{3}x+5$ ولإيجاد معادلة sg نلاحظ أن ميله m = ظل الزاوية 45°=1 وكما نعلم فإن معادلة مستقيم يمر بنقطة وميله

معلوم هي الشكل $y = m\,x + b$ أي $y = x + b$ ولإيجاد b نستفيد من مرور sg بالنقطة $s(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ فنجـد $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + b$ ومنه $b = 1$. فمعادلة sg هي $y = x + 1$ وبحـل معادلتي BC و sg أعلاه نجد أن $(\frac{19}{7}$ و $\frac{12}{7})g$ ويجدر بنا هنا تسجيل الملاحظات التالية :

I. إن عائد اللاعب (الشركة) A قد ارتفع من $\frac{1}{2} = 0.5$ إلى $\frac{12}{7} \approx 1.714$ كما أن عائد اللاعب (الشركة) B قد ارتفع من $\frac{3}{2} = 105$ إلى $\frac{19}{7} \approx 2.714$ أي أن كلاً من اللاعبين قد رفع مستوى عائداته بهذا الحل التفاوضي .

II. بالنظر إلى النقطة g التي حصلنا عليها أعلاه فإن مجموع العائدات الكلي في g يساوي 4.43 أقل منه في e (= 4.83) وأكبر منه في f (4.125) لذا فقد تكون هذه الطريقة في التفاوض أكثر قبولاً من طريقة الأمثلية الكلية .

III. إن الارتفاع النسبي لعائدات A= ($0.5 - 1.714 \approx 1.214$) يساوي الارتفاع النسبي لعائدات B = ($1.5 - 2.714 \approx 1.214$) . لكن هذا الأمر قد لا يقنع اللاعب (الشركة) B لأن مستوى أمانة $\left(\frac{3}{2}\right)$ هو بالأصل أكبر من مستوى أمان A$(\frac{1}{2})$ ولذا قد يلجأ B إلى استخدام استراتيجية تهديدية ليرغم A على التنازل عن جزء من مكاسـبه التي تعتبر كـبيرة نسـبياً من وجـهة نظر B . وهذا ما سنبحثه في الحـالة (ب) التاليـة ، ولكن دعـنا أولاً نوجـد الاستراتيجية g كاستراتيجية مختلطة بين B و C . فكما فعلنا أعلاه بالنسبة للنقطة e نجـد أن C $(1-\lambda)$ + λB = g تعطينا :

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{7} \\ \frac{19}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3\lambda \\ 4\lambda+1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{12}{7} = 3-3\lambda \\ \frac{19}{7} = 4\lambda+1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{7}$$

والتي تعنـــي أن علـــى اللاعبـــين (الـــشركتين) A , B أن يلعبـــا (يطبقـــا) الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{3}{7}B\ ,\ \frac{4}{7}C\right)$ ليحصلا على الاستراتيجية المثلى g .

(ب) نقطة الوضع الراهن هي الاستراتيجية التهديدية (2,2-) من اللاعب (الشركة)B للاعب (الشركة) A تعني خسارة 2 $ مليار لـــ A وربح 2 $ مليار لـــ B .

في هذه الحالة إذا اعتبرنا فئة التفاوض تقع على القطعة BC ورسمنا منصف الربع الأول للمستقيمين $y = 2\ ,\ x = -2$ [انظر الشكل (3ـــ2)] نجد أنه يقطع فئة التفاوض ef في النقطة j والتي نحصل عليها بحل معادلتي المستقيمين BC وهي $y = \frac{-4}{3}x + 5$ كما وجدنا أعـــلاه و Aj وهي من الشكل y =mx + b حيث m=1 ونوجد b بالاستفادة من مـــرور Aj بالنقطة A فنجد b=4 أي أن المعادلة هي $y = x + 4$. وبحل هاتين المعادلتين نجد $\left(\frac{31}{7}\text{ و }\frac{3}{7}\right)$j والتي تعني أن عوائد A ستتنافص إلى $\frac{3}{7}$ وهي أقل من كل من مستوى أمانه ومن النتيجة التي حصل عليها في (أ) بينما ارتفعت عوائد B من $\frac{19}{7}$ إلى $\frac{31}{7}$ الأمر الذي قد يضطر A للتنازل عن بعض مكاسبه التي حصل عليها في الحـــالة (أ) إلى غريمه B حتى لا يؤدي ذلك إلى خســـارة كبيرة له .

طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد

تقوم هذه الطريقة على الفلسفة التالية :

لنفـــرض أن اللاعبين A و B قـــد قبلا بأن يتفاوضا على تطبيق استراتيجية مختلطة من إستراتيجيتين $(A_1\ ,\ B_1)$ و$(A_2\ ,\ B_2)$ خالصتين أو مختلطتين (فمثلاً يمكن أن تكون $(A_1\ ,\ B_1)$ و $(A_2\ ,\ B_2)$ هما طـــرفي فئة التفاوض أو طرفي المستقيم الذي تقع عليه فئة التفاوض) ولو فرضنا أن العـــوائد المقابلـــة لهـــاتين الاستراتيجيتين هما $(a_1\ ,\ b_1)$ و$(a_2\ ,\ b_2)$ على الترتيب وأنهما تحققان الشرط التالي :

$$a_1 > a_2 \quad \text{ولكن} \quad b_1 < b_2 \qquad (*)$$

لاحظ مثلاً أن الشرط الأخير يتحقق من أجل الاستراتيجيتين C (3 , 1) و B (0 , 5) وكذلك من أجـل الاستراتيجيتين $f(\frac{21}{8},\frac{3}{2})$ و $e(\frac{1}{2},\frac{13}{3})$ اللتين تشـــكلا طرفي فئة التفاوض في مثال (3 ــ 6) وبالتالي فإن هذا الشرط محقق على أي نقطتين بينهما تكون فيها الأولى أقرب إلى f من الثانية . من الواضح أن اللاعب A سيفضل الحل (a_1 , b_1) على الحل (a_2 , b_2) لكن العكس هو الصحيح بالنسبة للاعب B إلا أن A سيفضل الانتقال من (a_1 , b_1) إلى (a_2 , b_2) إذا كانت خسارته النسبية من العوائد أقل أو تساوي الخسارة النسبية التي ستلحق بغريمه B أي إذا كان :

$$\text{الخسارة النسبية لـــ A} = \frac{a_1 - a_2}{a_1} \leq \frac{b_2 - b_1}{b_2} = \text{الخسارة النسبية لـــ B}$$

$$a_2b_2 \geq a_1b_1 \iff -a_2b_2 \leq -a_1b_1 \iff$$

وتعني النتيجة الأخيرة أن حاصل ضرب العائدات يزيد (أو يبقى على حـــاله) لدى الانتقال من الحل الأول إلى الحل الثاني . ويقودنا هذا الأمر إلى استنتاج المبدأ التالي :

(**) " سيقبل الطرفان A و B بحل بين الحلين يتصف بأن حاصل ضرب العائدات عنده أكبر ما يمكن " .

أما عملية إيجـــاد الحل الذي يحقق الشرط أو المبدأ (**) فهي على النحو التالي :

1 ــ نوجـــد معادلة المستقيم الذي يمر بالحلين (a_1 , b_1) إلى (a_2 , b_2) ثم نوجـــد الدالة $P(x) = x.y$.

2 ــ نبحث عن قيمة x على المستقيم الذي وجدناه في (1) والتي تجعل الدالة P (x) أكبر ما يمكن ثم نوجد قيمة y المقابلة بالتعويض عن هذه القيمة لـــ x بالمعادلة التي أوجدناها في (1) (نذكّر بأن x تمثل عوائد اللاعب A وأن y تمثل عوائد اللاعب B)

ولتوضيح ذلك نسوق المثال التالي :

مثال (3 ــ 10)

بالعودة إلى مثال (3 ــ 6) للشركتين A وB أوجـد الحل الأمثل للشركتين باستخدام طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد باعتبار أن نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن .

الحـــــل

وجدنا أن فئة التفاوض هي القطعة حيث $f\left(\frac{21}{8},\frac{3}{2}\right)$ و $e\left(\frac{1}{2},\frac{13}{3}\right)$ وكـما نلاحظ فإن الحلين f و e يحققان الشرط (**) .

كذلك فقد وجـدنا أن مـعادلة المســـتقيم BC هـــي $y=\frac{-4}{3}x+5$ وبذلك فـــإن $P(x)=x.y=\frac{-4}{3}x^2+5x$. ونحصل على قيمة x المثلى بجعـل مشـتقة الدالـة P(x) أعـــلاه مساوية للصفر حيث نجد ما يلي :

$$P'(x)=\frac{-8}{3}x+5=0 \Rightarrow x=\frac{15}{8}=1.875$$

$$\Rightarrow y=\frac{5}{2}=2.5$$

لاحظ أن $P''(x)=\frac{-8}{3}<0$ الأمر الذي يجعل الدالة P (x) أكبـر مـا يمكـن عنـد $x=\frac{15}{8}$. فبموجب هذه الطريقة يحصل A على1.875 كما يحـصل B علـى 2.5 . لاحظ أن عوائد A قد ازدادت إلا أن عوائد B قد نقصت إذا ما قورنت بالنتـائج التـي توصلنا إليها بطريقة منصف الربع الأول .

طريقة ناش وشابلي Shapley and Nash Method

تم اقتراح هذه الطريقة بحلول عام 1950 من قبل العالم ناش لحل المباريات التفاوضية وذات المجموع غير الصفري لشخصين وقد أطلق عليها اسم " طريقة ناش البدهية لحل المباريات التفاوضية " . ولتطبيق هذه الطريقة فقد اشترط توافر الشروط الستّ التالية :

ش1 : يجب أن يعتمد الحل فقد على المعلومات المتوافرة في مصفوفة العوائد .

ويعني هذا الشرط أن هذا الحل يجب ألا يعتمد على أي عوامل خارجة عن هذه المصفوفة مثل مقدرة أو خبرة أحد الأطراف على التفاوض أو أن يتمتع أحدهما بمركز قوي في إحدى المجالات كالمركز المالي أو الدولي ... الخ .

ويمكن توضيح الفكرة التي يتناولها الشرط (ش1) بما يلي :

لو افترضنا أن طرفي المباراة قد تبادلا الاستراتيجيات وعوائدها فعندئذٍ تكون المباراة الأصلية قبل عملية التبادل والمباراة الناتجة بعد عملية التبادل متطابقتان عدا أننا عكسنا دور الطرفين . ويعني الشرط (ش1) عندئذٍ أن يكون حل هاتين المباراتين متشابهاً وأن عملية التبادل هذه تؤدي إلى تبادل في العائدات النهائية الناتجة لطرفي النزاع . ومن الواضح أن هذا يعني ضمناً إلغاء أي مقدرة خاصة لأي من طرفي النزاع ليس لها علاقة بمصفوفة العوائد . فمثلاً لوعدنا إلى مثال (3ـ6) وبادلنا بين وضعي الشركتين لحصلنا على المصفوفة التالية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} (2\ ,\ -2) & (1\ ,\ 3) \\ (-2\ ,\ 1) & (5\ ,\ 0) \end{bmatrix}$$

فمن الواضح عندئذٍ أن اللاعبين (الشركتين) قد تبادلا الأدوار فقط ، لاحظ أن مضلع العوائد للمباراة G_1 هو نظير مضلع العوائد للمباراة G بالنسبة لمنصف الربع الأول . ولذا فإن تحليل المباراة G_1 سيكون على النحو التالي :

مستوى الأمان لـــ A هو $\upsilon_A = \frac{3}{2}$ ومستوى الأمان لـــ B هو $\upsilon_B = \frac{1}{2}$ وأنه إذا استخدمنا طريقة منصف الربع الأول فيمكننا التحقق أن فئة التفاوض هـــي e_1f_1 حيث $e_1\left(\frac{13}{3},\frac{1}{2}\right)$ و $f_1\left(\frac{3}{2},\frac{21}{8}\right)$ هي المناظرة للقطعة ef بالنـــسبة لمنـــصف الربع الأول وأن النقطة $g_1\left(\frac{19}{7},\frac{12}{7}\right)$ التـــي تنـــاظر $g\left(\frac{12}{7},\frac{19}{7}\right)$ بالنـــسبة لمنصف الربع الأول هي الحـــل المقابـــل في هـــذه الحالة . ويعبر عن الشرط (ش1) بشرط التناظر .

ش2 : يجب أن ينتمي أي حل يتم التوصل إليه إلى " فئة التفاوض " أو على الأقل إلى مضلع العوائد . وبعبارة أخرى إذا رمزنا بـ S لمضلع العوائد أو لفئة التفاوض (وهي جزء من S) وكان (x^*, y^*) هو الحل الناتج فلابد أن $(x^*, y^*) \in S$.

ش3 : إذا كانت $(\bar{x}, \bar{y})$ هي نقطة الوضع الراهن وكان (x^*, y^*) هو الحل الناتج فلابد أن يكون :

$$x^* \geq \bar{x} \qquad \text{و} \qquad y^* \geq y$$

ويعني الشرط (ش3) أن أي من طرفي النزاع لا يمكن أن يحصل على أقل مما حصل عليه في نقطة الوضع الراهن وعندما تكون نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان فذلك يعني أن أي من طرفي النزاع لا يمكن أن يحصل على أقل مستوى أمانه .

ش4 : يجب ألا يتأثر الحل نتيجة للتحويلات الخطية من الشكل $G' = aG + b$ (a و b مقداران معلومان) حيث G هي المباراة الأصلية و G' هي المباراة الناتجة بالتحويل الخطي .

ولا يعني الشرط (ش4) أن نقطة الحل لا تتغير ولكنه يعني أن التغير النسبي في العائدات يبقى ثابتاً . ولنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (3 ــ 11)

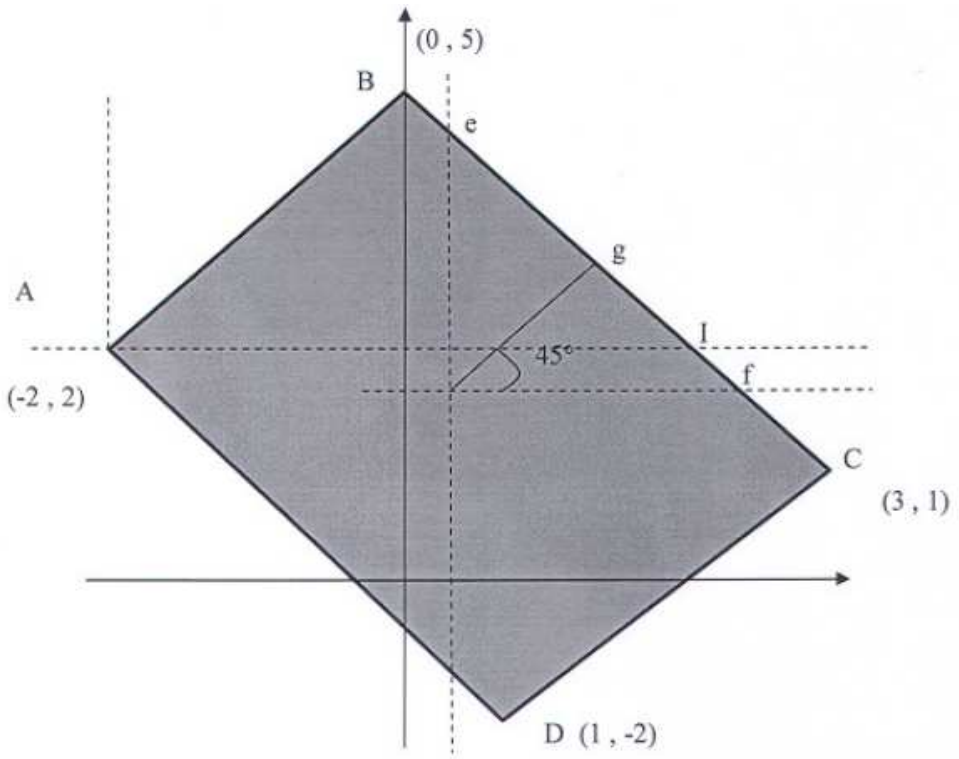
بالعودة إلى المثال (3 ــ 6) حيث كانت مصفوفة المباراة هي :

$$G = \begin{bmatrix} (-2, 2) & (1, -2) \\ (3, 1) & (0, 5) \end{bmatrix}$$

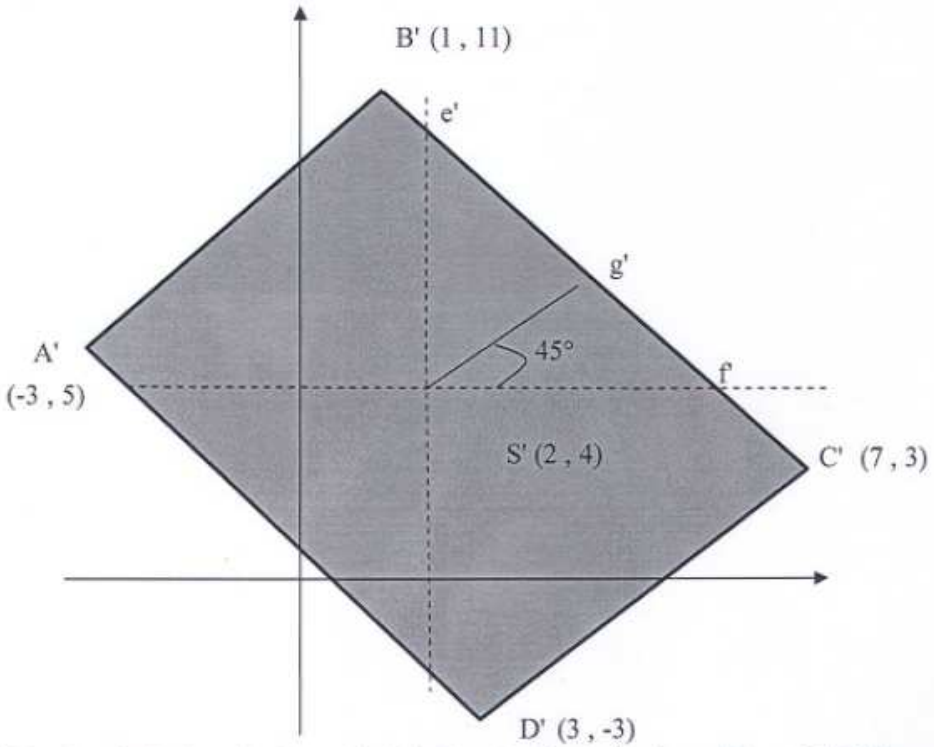
ولنفرض أننا أجرينا التحويل الخطي التالي : $G' = 2G + 1$ والذي يكافيء $x' = 2x + 1$ و $y' = 2y + 1$ فإن المصفوفة G' تعطى عندئذٍ كما يلي :

$$G' = \begin{bmatrix} (-3, 5) & (3, -3) \\ (7, 3) & (1, 11) \end{bmatrix}$$

عندئذ يمكن تمثيل مضلع العوائد للمباراتين G ، G' كما هو موضح في شكل (3 ــ 7) و شكل (3 ــ 8) التاليين :



شكل (3 ــ 7) مضلع العوائد للمباراة G



شكل (3 ــ 8) مضلع العوائد للمباراة G' الناتجة عن G بالتحويل الخطي G' = 2G + 1

وقد وجدنا أن نقطة الأمان للمباراة G هي $s\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ وأنه إذا اعتبرنا نقطة الأمان هذه هي نقطة الوضع الراهن فإن فئة التفاوض هي القطعة ef (الواقعة على الضلع BC) حيث $e\left(\frac{1}{2},\frac{13}{3}\right)$ و $f\left(\frac{21}{8},\frac{3}{2}\right)$. ولدى استخدام طريقة منصف الربع الأول فقد كان الحل هو النقطة $g\left(\frac{12}{7},\frac{19}{7}\right)$.

الآن لو قمنا بإجراءات مماثلة على 'G كتلك التي أجريت على G نجد أن نقطة الأمان هي $s'(2,4)$ وهي بالضبط النقطة الناتجة عن النقطة $s\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ بالتحويل الخطي $G' = 2G + 1$ (تحقق من ذلك) . كذلك فإن فئة التفاوض هي القطعة e'f' حيث $e'\left(2,\frac{29}{3}\right)$ و $f'\left(\frac{50}{8},4\right)$ والحل باستخدام طريقة منصف الربع الأول هو النقطة $g'\left(\frac{31}{7},\frac{45}{7}\right)$ وهي نفس النقاط المقابلة لـ e و f و g بالتحويل الخطي $G' = 2G + 1$ على الترتيب (تحقق من ذلك) .

الآن . ما يعنيه الشرط (ش4) الذي اقترحه ناش لا يعني أن نقطة الحل لن تتغير نتيجة أي تحويل خطي ولكن الذي يعنيه هو أن العائدات النسبية ستبقى دون تغيير أي أن :

$$\frac{eg}{fg} = \frac{e'g'}{f'g'} \qquad (3.2)$$

وهذا الأمر صحيح فعلاً حيث أن النتائج أعلاه تقود إلى النتائج الحسابية التالية :

$$eg = \sqrt{\left(\frac{12}{7}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{19}{7}-\frac{13}{3}\right)^2} = 2.02381$$

وبالمثل نجد أن :

$$fg = 1.51786 \text{ ومنه } \frac{eg}{fg} = 1.333 \text{ ، } e'g' = 4.047619$$

$$f'g' = 3.03571 \text{ ومنه } \frac{e'g'}{f'g'} = 1.333$$

وبذلك فإن العلاقة (3.2) محققة .

وكما وجدناه أعلاه بالنسبة للنقطة g فإنه يمكن التعبير عن النقطة 'g (في المباراة 'G) بدلالة الاستراتيجيتين الخالصتين 'B و 'C (المقابلتين لـ B و C بالتحويل الخطي أعلاه) بالعبارة الخطية المحدبة التالية (تحقق من ذلك) .

$$g' = \frac{3}{7}B' + \frac{4}{7}C'$$

فلو كانت العوائد في المباراة الأصلية مقدرة بالدولار مثلاً فإن النتائج لن تتغير فيما لو تم تقدير العوائد باليورو أو بالجنية الاسترليني أو أي عملة أخرى .

ش5 : إذا توفرت استراتيجيات إضافية للطرفين المتنازعين دون أن يكون للعائدات المقابلة لهذه الاستراتيجيات أي أثر على " نقطة الوضع الراهن " فيجب أن يترتب على ذلك تغيير في استراتيجيات الطرفين التفاوضية .

وتقوم فلسفة الشرط (ش5) على أنه إذا لم ينتج عن توفر الاستراتيجيات الإضافية أي تغيير في استراتيجيات الطرفين التفاوضية فهذا يعني ضمناً أن هذه الاستراتيجيات عديمة الأثر على الحل الناتج ويمكن بالتالي إهمالها أو عدم اعتبارها في الحل . ويعني الشرط (ش5) كذلك ما يلي : لو فرضنا أن أحد طرفي النزاع أو كلاهما قاما بإلغاء استراتيجية أو أكثر من البدائل المتاحة دون أن يكون لهذا الإلغاء أي تأثير في الحل الناتج فإن مثل هذا الإلغاء جائز ما لم يكن له تأثير على نقطة الوضع الراهن . ومن الناحية الرياضية : إذا كانت $(\bar{x}, \bar{y})$ هي نقطة الوضع الراهن و (x^*, y^*) هو الحل الناتج وإذا كان S هو مضلع العوائد وكانت T مجموعة جزئية من S بحيث أن $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ و $(x^*, y^*) \in T$ فعندئذٍ يمكن الاكتفاء بالمجموعة T .

ش6 : إذا كان S هو مضلع العوائد وكان (x^*, y^*) هو الحل الناتج وكان $(x, y) \in S$ بحيث أن $x \geq x^*$ و $y \geq y^*$ فعندئذٍ $(x, y) = (x^*, y^*)$.

ويشار للشرط (ش6) بشرط الأمثلية لـ باريتو (Pareto optimality condition). ويدل هذا الشرط أيضاً على أن الحل يقع بشكل عام على حدود مضلع العوائد المحددة وفقاً لنقطة الوضع الراهن . فمثلاً

في مثال (3ـ6) وعندما اعتبرنا أن نقطة الأمان $s\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ هي نقطة الوضع الراهن فقد أشرنا أن الحل يقع ضمن المثلث esf ولكن طبقاً للشرط (ش6) فإن الحل يقع على القسم من هذا المثلث الواقع على حدود مضلع العوائد أي على ef .

وقد أثبت ناش صحة النظرية التالية :

نظرية (3 ـ 2)

إذا كانت $(\bar{x},\bar{y})$ هي نقطة الوضع الراهن ، عندئذٍ توجد نقطة وحيدة (x^*, y^*) تحقق الشروط (ش1) إلى (ش6) وهذه النقطة هي التي تجعل الدالة التالية :

$$F(x,y)=(x-\bar{x})(y-\bar{y}) \qquad (3.3)$$

أكبر ما يمكن وتحقق بنفس الوقت

$$y^* > \bar{y} \quad \text{و} \quad x^* > \bar{x} \qquad (3-4)$$

سنوضح الآن طريقة ناش ـ شابلي من خلال إعادة حل المثال (3ـ6) بهذه الطريقة .

ملاحظة (3ـ3)

أطلقنا اسم طريقة ناش ـ شابلي على الطريقة أعلاه وذلك لأنه إذا كانت نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن فإن الحل الناتج له علاقة بما يسمى دالة قيم شابلي وهي أحد المفاهيم المستخدمة لحل المباريات التعاونية المتعددة الأطراف كما سنرى في الفصل المقبل علماً بأن الأسس النظرية بمجملها تعود إلى ناش .

مثال (3 ــ 12)

بالعودة إلى مثال (3ــ6) أوجد الحل الأمثل بطـريقة ناش ــ شابلي معتبـراً الحالتين التاليتين :

أ ــ نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان $s\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

ب ــ نقطة الوضع الراهن هي الاستراتيجية التهديدية (2 , 2-) .

الحـــل

أ ــ حسب الشرط (ش6) فإن الحل يجب أن يقع على حدود مضلع العوائد والـذي سميناه فئة التفاوض وهو القطعة ef . وفي هذه الحالة فإنه يمكن تطبيق النظرية (3ــ2) أعـلاه دون صعـوبة . فعلينا في هـذه الحالة البحث عـن النقطـة (x^* , y^*) من فئة التفاوض ef والتي تجعل الدالة (3.3) أكبر ما يمكن حيـث $\bar{x}=\frac{1}{2}$, $\bar{y}=\frac{3}{2}$. **الآن** يمكن تحويل الدالة $F(x,y)=(x-\frac{1}{2})(y-\frac{3}{2})$ إلـى دالة ذات متغير واحد وذلك بالاستفادة من العلاقة بين x , y على المستقيم BC الحامل لفئة التفاوض حيث وجدنا أن معادلة هذا المستقيم هي :

$$y=-\frac{4}{3}x+5$$

وبذلك فإن :

$$F(x,y)=f(x)=(x-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}x+5)=-\frac{4}{3}x^2+\frac{25}{16}x-\frac{7}{4}$$

ومن المعروف أن هـذه الدالـة تبلـغ قيمتها الكـبرى عند النقطة x^* التي تجعل $F'(x)=0$ و $F''(x)<0$.

الآن :

$$F'(x)=-\frac{8}{3}x+\frac{25}{6}=0$$

ومنها نجد :

$$x^* = \frac{25}{16} = 1.5625$$

ولما كـــان $F'(x) = -\frac{8}{3} < 0$ فـإنه عنـــد القيمـــة $x^* = \frac{25}{16}$ تبلـــغ الدالـــة $F(x, y) = f(x)$ قيمتها الكبرى . ومن القيمة $x^* = \frac{25}{16}$ ومعادلـة المستقيم BC نجد :

$$y^* = -\frac{4}{3} \times \frac{25}{16} + 5 = \frac{35}{12} = 2.9166$$

لاحظ أن $x^* = \frac{25}{16} = 1.5625 > \bar{x}$ وأن $y^* = 2.9166 > \bar{y}$

ب ــ لو قمنا برسم المستقيمين $x = -2$ و $y = 2$ [راجع شكل (3 ــ 7)] فإنـه بموجب الشرط (ش6) يجب أن يقع الحل على إحدى القطعتـين IB أو AB حيث $I\left(\frac{7}{3}, 2\right)$. ولم تكن مثل هذه المشكلة موجودة في الحالة (أ) حيث قمنا بتكبير الدالة $F(x, y)$ أعلاه على المستقيم الوحيد $y = -\frac{4}{3}x + 5$. أمـا فـي الحالة التي تكون فيها نقطة الوضع الراهن هي $\bar{x} = -2$, $\bar{y} = 2$ والـذي أدى بموجب الشرط (ش6) إلى جعل أي نقطة من أي من القطعتـين IB أو AB مرشحة لأن تكون الحل المطلوب فإن ثمة مشكلة حاضرة وتتمثل في أن الدالـة $(y - \bar{y})$ و $(x - \bar{x})$ حيث $(x,y) \in AB \cup IB$ قد لا تقطع أحد القطعتين كما هي الحال في مثالنا حيث نجد أن المتجه $(y - \bar{y})$ أو $(x - \bar{x})$ يقع على AB دوماً . وقد نواجه حالات يكون فيها تقاطع المتجه الأخير مع حدود مضلع العوائد هـو النقطة التهديدية نفسها كما هي الحال بالنـسبة للنقطتـين (الاسـتراتيجيتين) التهديديتين (1 , 3) أو (5 , 0) أو أن نواجه مشكلة شبيهة بما حصل عند النقطة (2 , -2) كما هي الحال بالنسبة للاستراتيجية التهديدية (-2 , 1) .

ثمة مشـكلة تجب ملاحـظتها هنا هـــو أن الدالـــة $F(x, y)$ المعرفـة بالعلاقة (3.3) تكبر إذا كبر $(x - \bar{x})$ أو $(y - \bar{y})$ على الأقـل . ومـن الواضـح أن

الحركة باتجاه IB تفيد اللاعب A أكثر في حين أن الحركة باتجاه IB أو BA تفيد اللاعب B . فلو اعتبرنا المستقيم BC فبالنسبة للنقطة (2 , 2-) يكون :

$$F(x,y) = (x+2)(y-2) = (x+2)(-\frac{4}{3}x+3)$$

أو $$f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{x}{3} + 6$$

ومنها $f'(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{1}{3} = 0$ وتعطينا $x = \frac{1}{8}$ ، ويقابلها $y = \frac{29}{6}$ والنقطة الناتجة $\left(\frac{1}{8}, \frac{29}{6}\right)$ تجعل $F(x,y)$ أكبر ما يمكن لأن $f''(x) = -\frac{8}{3} < 0$ كما أن هذه النقطة تقع على القطعة IB . لاحظ أن عوائد اللاعب (الشركة) B قد ارتفعت كثيراً في حين أن عوائد اللاعب (الشركة A) قد انخفضت كثيراً وتبدو هذه النتيجة منطقية لأن الاستراتيجية (2 , 2-) هي أصلاً في غير صالح اللاعب (الشركة) A .

ولو اعتبرنا المستقيم AB (ومعادلته $y = \frac{3}{2}x + 6$) والنقطة (2 , 2-) فإن $f(x) = (x+2)(\frac{3}{2}x+3) = \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2$ ومنها نجد أن $f'(x) = 3x + 6 = 0$ والتي تؤدي إلى $x = -2$ و $y = 2$ أي إلى النقطة نفسها . لكن هذه النقطة غير مقبولة لأنها تقابل قيمة صغرى لـ $f(x)$ باعتبار $f''(x) = 3 > 0$. فالنقطة الوحيدة المقبولة هنا هي $\left(\frac{1}{8}, \frac{29}{6}\right)$ وهي واقعة على IB كما أشرنا أعلاه . هب الآن أن النقطة الناتجة والمقبولة لا تقع على IB كأن تقع على امتداد IB وخارج القطعة IB أي أن المستقيم (الأمثل) الذي ينطلق من النقطة التهديدية (2 , 2-) يلتقي مع المستقيم IB في نقطة تقع على امتداد IB وخارج القطعة IB فالسؤال الآن :

ما هو المستقيم الأمثل وبالتالي ما هي الاستراتيجية التهديدية المثلى التي تضمن لنا حصول هذا التقاطع في المنطقة المطلوبة أي بين النقطتين I و B .

والجواب كما يلي :

لو فرضنا أن نقطة الوضع الراهن التهديدية هي $T(\bar{x},\bar{y})$ وأن ميل المستقيم الذي ينطلق من T هو m ($m > 0$) والذي سندعوه مستقيم تهديدي وأن هذا المستقيم يقطع أحد المستقيمات الحدودية المار بالنقطة (x_1 , y_1) والذي ميله m– بالنقطة $p(x^* , y^*)$ عندئذٍ تكون النقطة p مرشحة لأن تكون نقطة الحل الأمثل المرغوبة . (لمزيد من التفاصيل حول المستقيم الذي ميله m- انظر المرجع رقم [==]) . الآن معادلة كل من المستقيم التهديدي والحدودي المشار إليهما هي من الشكل $y = mx + b$ وبالاستفادة من مرور الأول بالنقطة $(\bar{x},\bar{y})$ والثاني بالنقطة (x_1 , y_1) نجد أن :

معادلة المستقيم التهديدية هي :

$$y = mx + \bar{y} - m\bar{x} \qquad (3.5)$$

معادلة المستقيم الحدودي هي :

$$y = -mx + (y_1 + mx_1) \qquad (3.6)$$

وبحل المعادلتين (5 ــ 3) و (6 ــ 3) نجد أن إحداثيات p تعطى بـ

$$x^* = \frac{y_1 - \bar{y} + m(x_1 - \bar{x})}{2m} \qquad (3.7)$$

$$y^* = \frac{y_1 - \bar{y} + m(x_1 - \bar{x})}{2} \qquad (3.8)$$

ومن المعادلتين (3 . 7) و (3 . 8) نجد أن :

$$\bar{x} = \frac{mx^* - y^*}{-2m} \qquad (3.9)$$

ومن المعادلة الأخيرة (3.9) نلاحظ أن أي انخفاض في قيمة $\bar{x}$ يعني تناقص الخسارة للاعب A ولذا فإن اللاعب A سيرغب بالتأكيد في جعل المقدار $mx^* - y^*$ أكبر ما يمكن (وهذا يكافيء جعل $\bar{x}$ أقل ما يمكن لأن $m > 0$) . وبالعكس فإن

اللاعب B يهدف إلى جعل خسارة A أكبر ما يمكن وهـذا يكـافيء جعـل المقـدار $mx^* - y^*$ أقل ما يمكن .

لو افترضنا الآن أن العوائد المقابلة للاستراتيجيات (A_i , B_j) فـي المـصفوفة الثنائية الأصلية ذات المجموع غير الصفري هـي مـن الـشكل (a_{ij} , b_{ij}) ولنعـرف المـصفوفتين $C = [a_{ij}]$ و $D = [b_{ij}]$ ولنعـرف كـذلك U بأنهـا مجموعـة الاستراتيجيات الممكنـة (البحتـة والمختلطـة) للاعـب A و V بأنهـا مجموعـة الاستراتيجيات الممكنة للاعب B عندئذٍ من أجل $u \in U$ و $\upsilon \in V$ فإن دالتي العوائد لـ A و B واللتان سنرمز لهما على الترتيب بـ $X (u , \upsilon)$ و $Y (u , \upsilon)$ تعطيـان بـ

$$X(u,\upsilon) = uC\upsilon^t , Y(u,\upsilon) = uD\upsilon^t , u \in U , \upsilon \in V \qquad (3.10)$$

وتستخدم هاتين العلاقتين لإيجاد النقطة التهديدية المثلى (υ^t يرمز إلى منقول υ transpose) ومن ذلك نجد أن :

$$mx - y = m(uC\upsilon^t) - uD\upsilon^t$$

أو

$$mx - y = u(mC - D)\upsilon^t \qquad (3.11)$$

وبناءً على مناقشتنا أعلاه فإن جعل المقدار $mx - y$ أكبر ما يمكن (أصغر ما يمكن) بالنسبة للاعب A (بالنسبة للاعب B) يكافيء القول بأن أفضل اسـتراتيجية تهديدية تعني أن يلعب A و B مباراة ذات مجموع صفري على المصفوفة

$$G_T = mC - D \qquad (3.12)$$

وتعزي هذه الطريقة الأخيرة لـ ناش (Nash) . أما الطريقة التي تستخدم نقطة الأمان كنقطة للوضع الراهن فتعزى إلى شابلي (Shapely) .

ملاحظة (3 ــ 3)

إن المستقيم التهديدي المشار إليه أعلاه قد لا يقطـع المـستقيم الحـدودي قيـد الاعتبار كما أن الحل النهائي قد يكون أحد النقاط الركنية لمضلع العوائد كما حصل في

المثال السابق . وفي جميع الأحوال لابد من تكرار العمل الموصوف أعلاه لجميع القطع المستقيمة الحدودية ذات الصلة بنقطة الوضع الراهن .

سنقوم الآن بتوضيح ما سبق شرحه أعلاه بالمثال التالي :

مثال (3 ــ 13)

لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين

$$G = \begin{bmatrix} (-3\ ,\ 0) & (-1\ ,\ -2) \\ (2\ ,\ 1) & (1\ ,\ 3) \end{bmatrix}$$

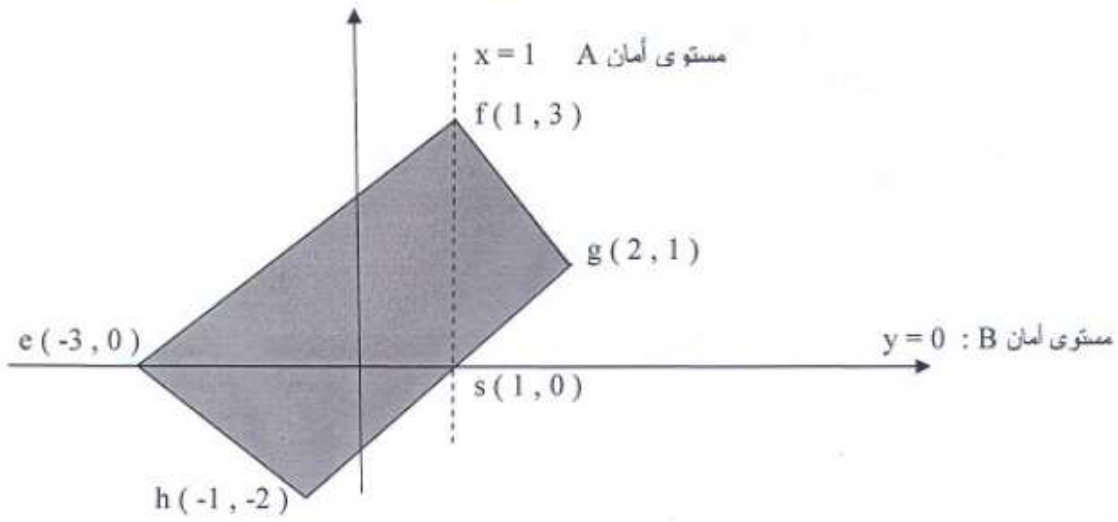
المطلوب :

أ ــ إيجاد الحل الأمثل للمباراة بطريقة شابلي وذلك باعتبار أن نقطة الوضع الراهن هي نقطة الأمان .

ب ــ إيجاد الحل الأمثل للمباراة بطريقة ناش وذلك باعتبار أن نقطة الوضع الــراهن هي النقطة التهديدية (2- , 1-) .

الحـــــل

إن مضلع العوائد لهذه المباراة معطى كما في الشكل (3 ــ 9) .



شكل (3ــ9) مضلع العوائد لمثال (3ــ13)

أ ــ طريقة شابلي :

$$G_B = \begin{matrix} \\ \\ \text{Min} \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{Max} \\ 0 \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \quad \text{و} \quad G_A = \begin{matrix} \\ \\ \text{Max} \end{matrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{Min} \\ -3 \\ 1 \\ \\ \end{matrix}$$

وللأولى G_A نقطة سرجية هي 1 كما أن للثانية نقطة سرجية هي 0 . فنقطة الأمان هي (1,0) s وفئة التفاوض هي fg (احظ أن sg ليست من فئة التفاوض) . فعلينا إذاً أن نبحث عن النقطة (x_s , y_s) على المستقيم fg التي تجعل الدالة

$$F_s(x , y) = (x - 1)(y - 0)$$

أكبر ما يمكن .

معادلة المستقيم fg هي $y = -2x + 5$ ولذا علينا إيجاد x^* التي تجعل الدالة التالية أكبر ما يمكن

$$f(x) = (x-1)(-2x+5) = -2x^2 + 7x - 5$$

$$f'(x) = -4x + 7 = 0 \qquad \text{لدينا}$$

وهذه تعطينا $(x_s = \frac{7}{4} \ , \ y_s = \frac{3}{2})$ وهي تقابل قيمة كبرى للدالة F (x , y) لأن $f''(x) = -4 < 0$. ويمكننا إيجاد الاستراتيجية المختلطة $i(\frac{7}{4}, \frac{3}{2})$ بدلالة الاستراتيجيتين الخالصتين f (1 , 3) و g (2 , 1) كما سبق وأوضحنا من العلاقة $i = \lambda f + (1-\lambda)\, g$. وبإجراء الحساب نجد $\lambda = \frac{1}{4}$.

ب ــ طريقة ناش :

بموجب شرط باريتو علينا أن نعتبر المستقيم الحدودي fg الذي ميله $-m = -2$ (حسب معادلته أعلاه) فعلينا إذاً أن نأخذ المستقيم التهديدي hp والذي ميله $m = 2$ حيث h (-2 , -1) هي النقطة التهديدية ونبحث عن النقطة $p(x^* , y^*)$ وذلك بحل المباراة الصفرية G_T المعرفة بالعلاقة (3.12) أي :

$$G_T = 2\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

وليس لـ G_T نقطة سرجية وحلها هو الاستراتيجيات المختلطة $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ للاعب A و $(\frac{9}{10}, \frac{1}{10})$ للاعب B . ولإيجاد النقطة التهديدية المثلى نستخدم العلاقة (3.10) حيث $C = G_A$ و $D = G_B$ فنجد أن احداثيات هذه النقطة التهديدية معطاة بـ

$$\bar{x} = (\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}) \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1}{10}) \\ (\frac{9}{10}) \end{bmatrix} = \frac{9}{50}$$

$$\bar{y} = (\frac{2}{5}\ \frac{3}{5}) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1}{10}) \\ (\frac{9}{10}) \end{bmatrix} = \frac{48}{50}$$

ولإيجاد حل ناش علينا إذاً إيجاد النقطة (x_N , y_N) على المستقيم fg والتي تجعل الدالة $F_N(x,y)$ أكبر ما يمكن . لدينا هنا ما يلي :

$$F_N(x , y) = f_N(x) = (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = (x - \frac{9}{50})(y - \frac{48}{50}) \Rightarrow$$

$$f_N'(x) = -4x + \frac{22}{5} = 0 \ \Rightarrow x_N = \frac{11}{10} , \ y_N = \frac{14}{5}$$

وهي تمثل قيمة كبرى لـ $F_N(x , y)$ على المستقيم fg لأن $f_N''(x) < 0$ ، وحيث نجد أن حل ناش $(\frac{11}{10}, \frac{14}{5})$ هي استراتيجية مختلطة من الاستراتيجيتين f و g بـ $\lambda = \frac{9}{10}$ (تحقق من ذلك) . ويمكننا كذلك إيجاد النقطة (x_N , y_N) بأخذ $(x_1 , y_1) = (1 , 3)$ و $m = 2$ والتعويض في العلاقات (3.7) و (3.8) .

ملاحظة (4 ــ 3)

أ ــ إضافة إلى الطرق السابق ذكرها في حل المباريات التفاوضية غير الصفرية فإن أي استراتيجية تجعل عوائد الطرف A أكبر من υ_A وعوائد الطرف B أكبر من υ_B (حيث υ_A , υ_B هما مستويا الأمان لـ A و B) هي استراتيجية تفاوضية ممكنة .

ب ــ إن استخدام طريقة ناش ــ شابلي كما في بعض الأمثلة التي وردت أعلاه يستلزم تحقق جميع الشروط من ش1 إلى ش6 ولكننا قد نصادف بعض الأمثلة التي لا يتحقق فيها واحد أو أكثر من هذه الشروط كما في المثال التالي :

مثال (3 ــ 14)

لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين A و B

$$G = \begin{bmatrix} (-4,-4) & (4,-8) \\ (-8,4) & (0,0) \end{bmatrix}$$

فهل لهذه المباراة حلاً بطريقة ناش ــ شابلي ؟

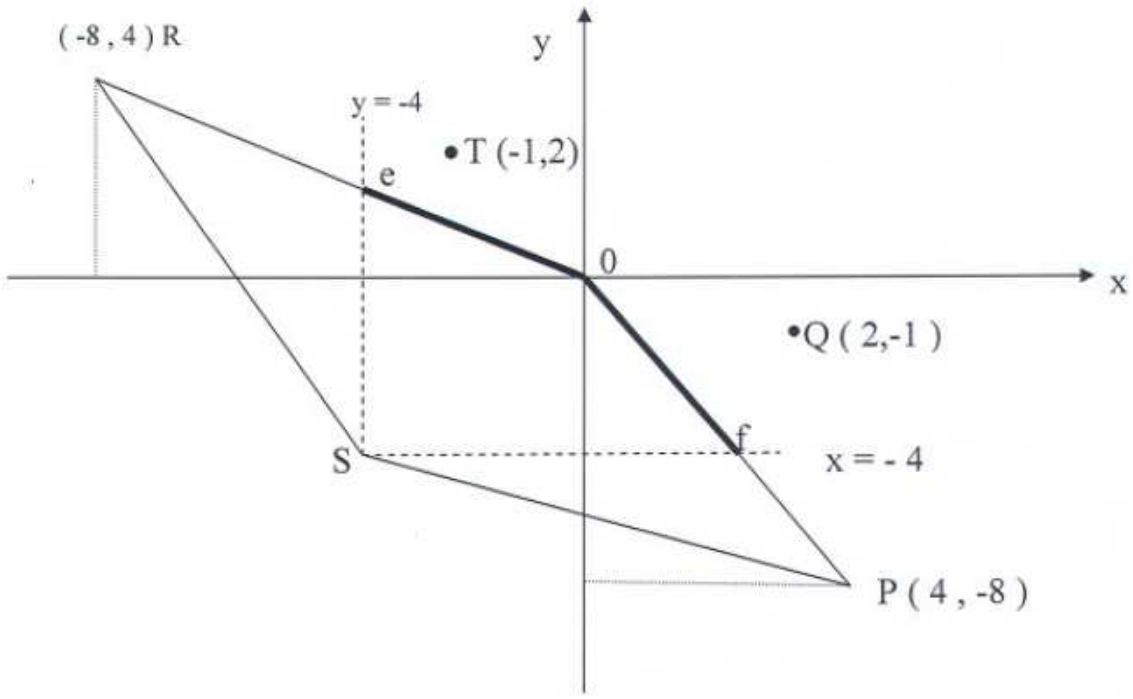
الحـــــل

إن مضلع العوائد لهذه المباراة معطى كما في الشكل (3ــ10) ويمكننا التحقق بسهولة أن نقطة الأمان هي (-4 , -4) S فإذا اعتبرنا هذه النقطة هي نقطة الوضع الراهن فإن فئة التفاوض تتكون من القطعتين Oe و Of . وللحصول على الحل بطريقة شابلي علينا أن نجعل الدالة

$$F(x,y) = (x+4)(y+4)$$

فلو أخذنا Oe نجد أن معادلة المستقيم المار بالنقطتين (4 , -δ) R و (0 , 0) O هي

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \text{أو} \quad \frac{y-4}{x+8} = \frac{-4}{8}$$



شكل (3 ــ 10) مضلع العوائد لمثال (3 ــ 14)

فعلى المستقيم Oe نجد أن :

$$F(x,y) = f(x) = (x+4)\left(-\frac{1}{2}x+4\right)$$

أو
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 16$$

ولما كان
$$f'(x) = -x+2 \quad \text{و} \quad f''(x) = -1 < 0$$

فإن أكبر قيمة للدالة f (x) تقع عند النقطة Q (2,-1) والتي تقع خارج مضلع العوائد .
ولو أخذنا Of نجد أن معادلته (معادلة المستقيم المار بالنقطتين O (0,0) و P (4,-8))
. $y = -2x$

وعلى هذا المستقيم نجد أن

$$F(x,y) = f(x) = (x+4)(-2x+4) = -2x^2 - 4x + 16$$

ولما كان
$$f'(x) = -4x - 4 \quad \text{و} \quad f''(x) = -4 < 0$$

فإن أكبر قيمة لهذه الدالة تقع عند النقطة (2 , -1) T والتي تقع هي الأخرى خـــارج مضلع العوائد . فالحلين (1- , 2) Q ، (2 , 1-) T غير مقبولين كحلـــول للمبـــاراة لأنهما يتناقصان مع مضمون الشرط ش2 . في مثل هذه الحالة لابد لنا أن نبحث عـــن نقطة على حدود مضلع العوائد تكون فيها قيم الدالة F (x,y) فـــي الحـــالتين متـــساوية وأكبر ما يمكن . فبمساواة F (x,y) = f (x) في الحالتين نحصل على العلاقة

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 16 = -2x^2 - 4x + 16$$

والتي تكافيء

$$\frac{3}{2}x^2 + 2x = 0$$

ولهذه المعادلة حلان هما :

الأول : $x = 0$ ويعطينا النقطة (0 , 0) والتي تقع على مضلع العوائد .

الثاني : $x = -\frac{4}{3}$ ويعطينا النقطة $\left(-\frac{4}{3}, \frac{64}{3}\right)$ والتي تقع خارج مضلع العوائد .

فالحل الأول (0 , 0) O هو الحل المقبول حيث تبلغ F (x,y) القيمة 16 كأكبر قيمـــة لها على مضلع العوائد . لاحظ أن النقطة O هي كذلك أبعد نقطة من فئة التفاوض .

تمارين (3 ــ 1)

1 ــ تتنافس شركتان A و B لتصنيع السلاح في تسويق منتجاتهما ولدى كل منهمـــا استراتيجيتان مختلفتان لهذا الغرض . ونتيجة للدراسات فقد وجـــد أن العوائـــد المقابلة لهذه الاستراتيجيات معطاة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (3, -1) & (-1, 1) \\ (1, 0) & (-2, -1) \end{bmatrix}$$

(1) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة .

(2) إذا اعتبرنا هذه المباراة تفاوضية أوجد أفضل استراتيجية لكلا الشركتين والتي تجعل عوائدها أكبر ما يمكن بكل من الطرق التالية معتبراً أن نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن :

(أ) طريقة الأمثلية الكلية .

(ب) طريقة منصف الربع الأول .

(جـ) طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد .

(د) طريقة شابلي .

2 ـ إن الحفاظ على مواقع التحكم والسيطرة من الأمور ذات الشأن الكبير في الدول . ولدى الطرف المعادي ثلاث استراتيجيات مختلفة لضرب وإضعاف هذه المواقع (من الجو ، من البحر ، من القوات البرية) كما أن لدى الطرف المدافع أيضاً ثلاث استراتيجيات مختلفة للدفاع وقد تم تقدير العوائد المقابلة لهذه الاستراتيجيات المختلفة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1 , 4) & (3 , -1) & (-2 , -2) \\ (1 , 0) & (-1 , 2) & (3 , 3) \\ (5 , 1) & (4 , 2) & (-1 , -1) \end{bmatrix}$$

(1) هل لهذه المباراة نقاط توازن ؟ ما هي في حال الإيجاب ؟

(2) هل يوجد لهذه المباراة استراتيجيات بارزة ؟ وما هي في حال الإيجاب ؟

(3) ارسم مضلع العوائد ، ثم أوجد أفضل استراتيجية لكلا الطرفين معتبراً أن هذه المباراة تفاوضية بين طرفين A و B وذلك بكل من الطرق التالية :

(أ) الأمثلية الكلية .

(ب) طريقة منصف الربع الأول معتبراً نقطة الأمان كنقطة للوضع الراهن .

(جـ) طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد معتبراً نقطة الأمان كنقطة للوضع الراهن .

3 ـ لدى كل من دولتين جارتين بينهما نزاع طويل الأمد ثلاث طرق لمواجهة الدولة الأخرى وإضعافها (سياسية ـ عسكرية ـ اقتصادية) ونتيجة للدراسات فقد تبين أن العوائد المقابلة لاستراتيجيات الدولتين هي كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1,5) & (4,-1) & (3,2) \\ (2,3) & (2,4) & (5,0) \\ (4,1) & (3,-1) & (0,3) \end{bmatrix}$$

(1) هل هذه المباراة قابلة للاختصار بواسطة الهيمنة .

(2) أوجد نقاط التوازن للمباراة غير التعاونية .

(3) ارسم مضلع العوائد وأوجد أفضل الاستراتيجيات لكلا الدولتين بكافة الطرق الممكنة معتبراً أنها مباراة تعاونية .

4 ـ تواجه إحدى الدول تمرداً مسلحاً من إحدى الجماعات فيها والتي تستخدم حرب العصابات أحياناً واختطاف الرهائن أحياناً أخرى ولدى الجيش في هذه الدولة أيضاً خطتان ممكنتان لمواجهة هذا التمرد هما إما الهجوم الشامل أو بالقصف الجوي لأماكن المتمردين . يبين الجدول التالي العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة :

المتمردين	الدولـــــة هجوم شامل	 قصف جوي
حرب عصابات	(1 , 5)	(-2 , -3)
اختطاف الرهائن	(1 , 5)	(-5 , 0)

(1) أوجد جميع نقاط التوازن للمباراة بطريقة سواستكا .

(2) ما هي الاستراتيجية المثلى لكل من الدولة والمتمردين باستخدام (اعتبر أن نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن) .

(أ) طريقة الأمثلية الكلية .

(ب) طريقة منصف الربع الأول .

(جـ) طريقة تكبير حاصل ضرب العوائد .

(د) طريقة شابلي .

5 ـ تتنافس شركتان عالميتان لتسويق الملابس الجاهزة ولدى كل منهما استراتيجيتان مختلفتان لهذا الغرض ، وقد تبين أن العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة لهاتين الشركتين معطاة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1 , 4) & (-1.5 , 2) \\ (3 , 1) & (4 , 1) \end{bmatrix}$$

(1) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة بطريقة سواستكا . هل للمباراة حل بالمعنى العام .

(2) ما هي الاستراتيجية المثلى لكلا الشركتين والتي تحقق لها أكبر العوائد إذا اعتبرنا أن هذه المباراة تفاوضية وما هي الطريقة التي تم على أساسها التفاوض ؟ .

6 ــ لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين :

$$G = \begin{bmatrix} (3,2) & (3,0) & (2,2) \\ (1,0) & (3,3) & (0,3) \\ (0,2) & (0,0) & (2,3) \end{bmatrix}$$

(1) ما هي نقـــاط التوازن لهذه المبـــاراة ؟ وهل يوجد بينهمـــا اســـتراتيجية بارزة ؟

(2) هل توجد نقاط توازن قابلة للمبادلة ؟ ما هي في حال الإيجاب ؟

(3) هل للمباراة حل بالمعنى الدقيق ؟ وهل لها حل بالمعنى العـــام ؟ وضـــح إجابتك .

(4) إذا اعتبرنا أن المباراة تفاوضية وأن نقطة الأمان هـــي نقطـــة الوضـــع الراهن فالمطلوب :

(أ) أرسم مضلع العوائد وتحديد نقطة الأمان .

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة منصف الربع الأول .

(جـــ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة شابلي ثـــم بطريقـــة نـــاش معتبـــراً الاستراتيجية التهديدية (0,3) .

(د) هل المباراة قابلة للاختصار ؟ وما هي أقل مباراة مختصرة فـــي حال الإيجاب .

(هـــ) هل للمباراة حل بالمعنى الدقيق ؟ بالمعنى العام ؟ وضح إجابتك .

7 ــ لدينا المباراة الثنائية التفاوضية التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (a\,,\,2) & (3\,,\,0) \\ (2\,,\,0) & (2\,,\,2) \end{bmatrix}$$

حيث a هي معلمة تأخذ قيماً اختيارية . أوجد نقطة الأمان ثم وضـــح أن الحـــل بطريقة شابلي يعطي كما يلي

(1) $\left(9/4\,,\frac{3}{2}\right)$ من أجل $a \le 2$.

(2) $\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4a}\,,\frac{3}{2}\right)$ من أجل $2 < a < 3$.

(3) $(a\,,2)$ من أجل $a \ge 3$.

ماذا يلفت انتباهك في النتائج التي حصلت عليها في (1) و (2) و (3) ؟

9 ــ اعتبر المباراة الثنائية التالية كمباراة تعاونية نقطة الوضع الراهن فيها هي نقطة الأمان .

$$G = \begin{bmatrix} (2\,,\,1) & (3\,,\,2) & (0\,,\,4) \\ (0\,,\,1) & (4\,,\,1) & (2\,,\,1) \end{bmatrix}$$

والمطلوب :

(أ) ارسم مضلع العوائد ثم وضح أن فئة التفاوض تتكون من أكثر من قطعة مستقيمة .

(ب) أوجد الحل بطريقة شابلي . ماذا تلاحظ ؟

10 ــ لديك المباراة الثنائية التالية والتي سنعتبرها مباراة تعاونية نقطة الأمان فيها هي نقطة الوضع الراهن .

$$G = \begin{bmatrix} (1\ ,\ 4) & (-1\ ,\ -4) \\ (-4\ ,\ -1) & (4\ ,\ 1) \end{bmatrix}$$

المطلوب :

(أ) ارسم مضلع العوائد ووضح أنه متناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول .

(ب) وضح وبموجب شروط ناش أن حل شابلي الأمثل (X^* , Y^*) يحقق $X^* = Y^*$ وتحقق من صحة ذلك بالنسبة لهذه المباراة .

(جـ) أعد إيجاد الحل الأمثل بطريقة ناش باستخدام الاستراتيجية التهديدية (-4,-1) ثم باستخدام الاستراتيجية التهديدية (4- , 1-) . ماذا تلاحظ ؟

المباريات المتعددة الأطراف
N-Person Games

(4–1) مقدمـــة

تعرضنا في الفصلين السابقين إلى دراسة وتحليل المباريات التي يتكون فيها أطراف النزاع من اثنين فقط . وسنتعرض في هذا الفصل إلى المباريات التي تشمل أكثر من طرفين حيث سنفترض أن عدد أطراف النزاع يساوي n . وسنعطي الرموز 1, 2, .., n لهؤلاء الأطراف . وإذا إفترضنا أن اللاعب i حيث i = 1, 2, .., n يلعب الاستراتيجية X_i كاستراتيجية خالصة أو مختلطة فإننا سنرمز بالرمز $e_i (X_1, X_2, .., X_i, \ldots, X_n)$ للعائد المتوقع للاعب i .

(4–2) المباريات المتعددة الأطراف وغير التعاونية :

كما رأينا أعلاه فإن أي مباراة ذات مجموع صفري (أو ثابت) لشخصين هي مباراة غير تعاونية . ولو أردنا تعميم مفهوم هذا النوع من المباريات على المباريات المتعددة الأطراف فإن ذلك يعني أن على كل لاعب أن يسعى إلى جعل عوائده أكبر ما يمكن وعوائد خصومه أقل ما يمكن وهذا أمر يصعب تحقيقه من الناحية العملية نظراً للصعوبة والغموض اللذين يكتنفان اختيار الاستراتيجيات التي تحقق مثل ذلك الهدف . وعندما تعرضنا للمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين فقد قدمنا مفهوم نقاط التوازن كحلول ممكنة للمباريات غير التعاونية منها ولكن العيب في هذا المفهوم هو أنه لا يوصل ــ كما أشرنا إلى حل (أو حلول) محدد (محددة) لهذا النوع الأخير من المباريات . ولو نظرنا إلى أي مباراة متعددة الأطراف على أنها غير تعاونية (Noncooperative) فإننا نعرف وبطريقة مماثلة ما يلي :

تعريف (4-1) :

نقــول عن الاســتراتيجــة $(X_1, X_2, .., X_i, .., X_n)$ أنــها نقطــة توازن (Equilibrium point) إذا كان

$$e_i (X_1, X_2, .., X_i, .., X_n) \geq e_i (X_1, X_2, .., Y_i, .., X_n)$$

من أجل أي استراتيجية أخرى Y_i للاعب i حيث $i = 1, 2, .., n$.

وما أثبته ناش من أجل المباريات ذات الشخصين يمكن تعميمه إلى المباريــات ذات n شخصاً حيث أثبت ناش أيضاً ما يلي :

نظرية (4-1)

يوجد لأي مباراة ذات n شخصاً وذات عدد محدد مــن الاســتراتيجيات نقطــة توازن واحدة على الأقل .

ومع ذلك ومع أن النظرية الأخيرة تضمن وجود نقطة توازن واحدة علــى الأقــل لأي مباراة متعددة الأطراف إلا مشكلة تعدد نقاط التوازن تجعل الوصول إلى حل محدد لمثل هذه المباريات أمراً متعذراً كما كانت عليه الحال في المباريات غيــر التعاونيــة وذات المجمــوع الصــفري لشخصين . ولذا ســوف يكــون اهتمامــنا فيما يلــي من هــذا الفصــل منصــباً فقــط علــى المباريــات التعــاونية المتعــددة الأطــــــراف (n-Peron cooperative Game) .

(4ــ3) المباريات التعاونية المتعددة الأطراف :

إن اسم " مباراة تعاونية " يعني أنه يمكن لبعض أطراف المباراة أو لجميعهم أن يقوموا بالاتصال والتنسيق ومن ثم التفاوض إذا رغبوا بالتعاون فيما بينهم . ويقتــضي ذلك تنسيق سياساتهم بطريقة مناسبة توصل كل منهم إلى عوائد أفضل . وعندما تقــوم فئة من هؤلاء الأطراف بالتعاون فإننا ســنطلق علــى هــذه الفئــة اســم " ائــتلاف " (Coalition) ويفترض في المباريات التعاونية المتعددة الأطراف أن جميع الأطــراف المكونة لأتلاف ما تعمل كما لو أنها لاعب (أو طرف) واحد يحقق أكبر عائــد كلــي لهذا الائتلاف وأن باستطاعة الأطراف داخل أي ائتلاف أن تتنازل لبعضها البعض عن جزء من عائداتها الخاصة . ويعني ذلك أن جميع أطراف الائتلاف ســيقومون بقــسمة

العائد الكلي لفئتهم بطريقة ترضي جميع الأطراف في هذه الفئة وبالتالي فإن الهدف لجميع الأطراف في هذا الائتلاف سيكون منصباً بالدرجة الأولى على تحقيق عائد كلي أكبر من مجموع ما كان يمكن أن يحققه كل منهم خارج الائتلاف . وبعد أن يحقق الائتلاف أهدافه فإن باستطاعة أعضائه إجراء قسمة رضفائية فيما بينهم وذلك عن طريق تقديم التنازلات لبعضهم فيما يمكن تسميته صفقات جانبية (Side payments) .

وقبل البدء بدراسة وتحليل المباريات التعاونية المتعددة الأطراف يمكننا ملاحظة أنه في مباراة غير تعاونية وذات المجموع الصفري لشخصين فإن كل من اللاعبين يكوّن بمفرده ائتلافاً أما في حالة المباراة التعاونية ذات المجموع غير الصفري لشخصين فإن اللاعبين معاً يكوّنان هذا الائتلاف . لنفرض الآن عدد اللاعبين هو n (n>2) وأن المجموعة N = {1, 2, 3, .., n} ترمز لهؤلاء اللاعبين فيمكننا عندئذٍ القول عن أي مجموعة S جزئيه من N بأنها تكوّن ائتلافاً . ومن الواضح أن أي ائتلاف S يقابله ائتلاف مضاد هو N-S لأنه إذا سعى S إلى جعل عوائده أكبر ما يمكن فإن ذلك سيؤدي إلى جعل عوائد N-S أقل ما يمكن والعكس بالعكس . ولذلك يمكن النظر إلى عوائد S و N-S على أنها عوائد لمباراة ذات مجموع صفري (نذكر بأن أي مباراة ذات مجموع صفري هي غير تعاونية) للفئتين S و N-S وعندها فإن ما يحصل عليه S في مثل هذه المباراة من خلال تطبيق مبدأ أكبر الأقل (Maxmin) هو قيمة هذه المباراة فإذا رمزنا بـ X_s ، Y_{N-S} لمجموعة الاستراتيجيات الممكنة (خالصة ومختلطة) للائتلاف S والائتلاف المضاد N-S على الترتيب فإن قيمة المباراة المقابلة لهذين الائتلافين والتي سنرمز لها بالرمز ϑ (S) تعطي بـ

$$\vartheta(S) = \underset{X \in X_s}{\text{Max}} \; \underset{Y \in Y_{N-s}}{\text{Min}} \sum_{i \in S} e_i(X, Y) \qquad (4.1)$$

وبحسب اصطلاحنا أعلاه بأن كل مجموعة جزئية من N يمكن أن تكوّن ائتلافاً فإننا (ومن أجل استكمال البناء الرياضي) سنعتبر أن المجموعة الخالية ϕ تكوّن ائتلافاً وأن قيمة المباراة من أجله تساوي الصفر أي

$$\vartheta(\phi) = 0 \qquad (4.2)$$

لاحظ أن الائتلاف المقابل بـــ (ϕ) هو الائتلاف N المكون من جميع اللاعبين ولما كان عدد المجموعات الجزئية من N المكونة من n عنصراً (بما فيها المجموعة الخالية) يساوي 2^n فإن هذا العدد الأخير يمثل عدد الائتلافات الممكنة من المجموعة N وبالتالي يمكننا النظر إلى ϑ (S) على أنها دالة (Function) معرفة علـــى مجموعـــة جميـــع الائتلافات الممكنة من N والتي سنرمز لها بالرمز P (N) وأن قيمتها عند أي ائـــتلاف S معطاة كما في العلاقة (4.1) وقيمتها عند ϕ معطاة بالعلاقة (4.2) . تسمى مثل هذه الدالة باسم " الدالة المميّـــزة " (Characteristic Function) . ولتوضـــيح فكرتـــي الائتلاف والدالة المميزة نسوق المثال البسيط التالي :

مثال (4-1)

تتكون مجموعة اللاعبين N من ثلاث أشـــخاص { 1, 2, 3} = N وتقتـــضي قواعد اللعبة أنه إذا اتفق اثنان منهم على تكوين ائتلاف فإن الثالث سيدفع لكـــل منهمـــا مبلغ 1 $. أما إذا كون الجميع ائتلافاً واحداً فإن ذلك لن يعود عليهم بشيء عندئذٍ نجـــد بسهولة أن مجموعة جميع الائتلافات الممكنة P (N) والدالة المميزة ϑ (S) تعطي كما يلي :

$$P(N) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, (2,3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

S	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
ϑ (S)	0	-2	-2	-2	2	2	2	0

جدول (4-1) الدالة المميزة لمثال (4-1)

أما تأويل أن الطرفين S و N-S هما طرفان لمباراة ذات مجمـــوع صـــفري فـــيمكن توضيحه بالنسبة للمثال (4-1) أعلاه كما في الجدول (4-2) التالي :

S	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
العائد	0	-2	-2	-2	2	2	2	0
N-S	N	{2,3}	{1,3}	{1,2}	{3}	{2}	{1}	ϕ
العائد	0	2	2	2	-2	-2	-2	0

جدول (4-2)

وبشكل عام يمكن تحويل أي مباراة متعددة الأطراف من n شخصاً وذات مجموع غير صفري إلى مباراة ذات مجموع صفري وذلك بإضافة لاعب (طـرف) وهمـي هـو اللاعب الـ n+1 نتصور أنه سيتحمل (أي يدفع من حسابه الخاص) مجموع عائدات جميع الأطراف الـ n المشاركين في هذه المباراة أي أن :

$$\vartheta(N) = -\vartheta(\{n+1\}) \qquad (4.3)$$

ولكننا لا نعتبر عندئذٍ بأن هذا اللاعب الوهمي طرفاً من أطراف النزاع بل هو مجـرد لاعب وهمي الغرض من إضافته هو تحويل المباراة ذات المجموع غير الصفري إلـى أخرى ذات مجموع صفري أو ثابت . وكمثال توضيحي نسوق المثال التالي :

مثال (4-2)

لو أخذنا المباراة الثنائية التالية ($N = \{1, 2\}$) .

$$G = \begin{bmatrix} (6,0) & (6,-1) & (6,-6) \\ (1,6) & (3,3) & (0,8) \end{bmatrix}$$

فمن الواضح أنها ذات مجموع غير صفري . يمكننا تحويل هذه المباراة إلى أخرى ذات مجموع صفري وذلك بإضافة لاعب ثالث وهمي عائداته تحقق الشرط (4.3) فنحـصل على المباراة G_0 التالية :

$$G_0 = \begin{bmatrix} (6,0,-6) & (6,-1,-5) & (6,-6,0) \\ (1,6,-7) & (3,3,-6) & (0,8,-8) \end{bmatrix}$$

ولما كانت المباريات الصفرية هي حالة خاصة من المباريات ذات المجموع الثابت فإنه يمكننا كذلك تحويل المباراة الأخيرة إلى مباراة ذات مجموع ثابـت 30 مـثلاً وذلـك بإضافة العدد 10 إلى جميع عناصر المصفوفة الصفرية G_0 حيث نحصل عندها علـى المباراة :

$$G_c = \begin{bmatrix} (16,10,4) & (16,9,5) & (16,4,10) \\ (11,16,3) & (13,13,4) & (10,18,2) \end{bmatrix}$$

ومن الواضح كذلك أنه يمكن تحويل كل مباراة ثابتة المجموع إلى مبـــاراة صـــفرية . فمثلاً يمكن تحويل المباراة G_c إلى مباراة صفرية بطرح 10 من جميع العائدات في هذه المصفوفة . لنلاحظ كذلك أنه في المباراة G_0 أعلاه أن أي ائتلاف مكون من واحـــد ، اثنين أو ثلاثة من اللاعبين سيقابله ائتلاف مضاد مكون من اثنين ـــ واحد أو صفر من اللاعبين على الترتيب وأن المبـــاراة الناتجـــة عندئذٍ هي مـــباراة ذات مجموع صفري (أو ثابت) .

ثمة صعوبات تكتنف مفهوم الدالة المميزة الذي قدمناه أعلاه ومن أهمها أن الدالة المميزة تبين ما يمكن أن يحصل عليه أي ائتلاف (من الائتلاف المضاد) ولكنها تفشل في توضيح كيفية توزيع عائد هذا الائتلاف بين أطرافه . ومع ذلك فإن المفهوم أعـــلاه للدالة المميزة يعتبر من أفضل المفاهيم لدراسة وتحليل المباريات التعاونيـــة المتعـــددة الأطراف بالنظر إليها كمباريات ذات مجموع صفري (أو ذات مجموع ثابت) .

وكـــدالة معـــرفة على $P(N)$ فإن الدالـــة المميـــزة $\vartheta(.)$ تتمتـــع وضـــوحاً بالخاصية التالية :

إذا كان S_1 ، S_2 ائتلافين منفصلين $(S_1 \cap S_2 = \phi)$ من $P(N)$ فإن :

$$\vartheta(S_1 \cup S_2) \geq \vartheta(S_1) + \vartheta(S_2) \qquad (4.4)$$

ويمكن تبرير ذلك بملاحظة أنه في الطرف الأيسر مـــن (4.4) فـــإن $S_1 \cup S_2$ يلعـــب كائتـــلاف ضد $N-(S_1 \cup S_2)$ ، أما في الطـــرف الأيمن فإن S_1 يلعب كـــائتلاف ضـــد $N-(S_1 \cup S_2)$ و S_2 ، كما أن S_2 يلعب كائتلاف ضد $N-(S_1 \cup S_2)$ و S_1 .

إن العلاقة (4.4) يمكن أن تتحقق من أجل $S_1 \cap S_2 = \phi$ إذا كان

$$\vartheta(S_1 \cup S_2) = \vartheta(S_1) + \vartheta(S_2) \qquad (4.5)$$

حيث نقول عن المباراة عندئذٍ أنها غير أساسية (Inessential) و إلا فإننا نقـــول عـــن المباراة أنها أساسية (Essential)، فعلى سبيل المثال نلاحظ أن مباراة المثـــال (4-1) أساسية . ومن أجل أي مباراة غير أساسية سيكون لدينا

$$\vartheta(N) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\{i\}) \qquad (4.6)$$

ولمزيد من الإيضاح حول كيفية حساب الدالة المميزة وتحديد نوعية المباراة (أساسية أو غير أساسية) نسوق الأمثلة التالية :

مثال (4-3)

لنفرض أن لدينا ثلاثة لاعبين يقوم كل منهم باختيار أحد اللونين أخضر (سنرمز له بـ G) أو أحمر (سنرمز له بـ R) وأن مصفوفة العوائد هي مصفوفة ذات مجموع صفري معطاة كما يلي :

$$M_1 = \begin{array}{c} \text{اللاعب 1} \\ \begin{array}{cc} G & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} G\,(1,1,-2) & (0,0,0) \\ R\,(0,0,0) & (2,2,-4) \end{bmatrix} \end{array} \text{اللاعب 2}$$

اللاعب 3 قام باختيار اللون G

و

$$M_2 = \begin{array}{c} \text{اللاعب 1} \\ \begin{array}{cc} G & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} G\,(3,3,-6) & (0,0,0) \\ R\,(0,0,0) & (1,1,-2) \end{bmatrix} \end{array} \text{اللاعب 2}$$

اللاعب 3 قام باختيار اللون R

لدينا :

$$P(N) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

وبما أن المباراة ذات مجموع صفري فإن :

$$\vartheta(\phi) = 0 \quad , \quad \vartheta(\{1,2,3\}) = 0$$

والائتلاف الممكنة هي $S = \{1,2\}$ مقابل $N\text{-}S = \{3\}$ و $S = \{1,3\}$ مقابل $N\text{-}S = \{2\}$ و $S = \{2,3\}$ مقابل $N\text{-}S = \{1\}$ ، فمن أجل الائتلاف الأول $\{1,2\}$ مقابل $\{3\}$ نجد أن استراتيجياته الممكنة هي RR , RG , GR , GG واستراتيجيات الخصم R , G وبموجب المعطيات في M_1 و M_2 نجد أن عوائد الائتلاف $\{1,2\}$ مقابل استراتيجياتهم المختلفة معطاة على الترتيب كما في المصفوفة :

$$S = \{1,2\} \quad \begin{array}{c} N\text{-}S = \{3\} \\ \begin{array}{cc} G & R \end{array} \\ \begin{array}{c} GG \\ GR \\ RG \\ RR \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = G_1$$

و G_1 يمكن اختصارها بواسطة الهيمنة إلى :

$$S=\{1,2\}\begin{bmatrix} N\text{-}S=\{3\} \\ 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

وبموجب هذه المصفوفة ، وكمباراة ذات مجموع صفري فإن الائـــتلاف $S = \{1 , 2\}$ سيلعب الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{1}{3},0,0,\frac{2}{3}\right)$ لـــ (GG , GR , RG , RR) ويحصل على القيمة $\upsilon=\frac{10}{3}$ ، أما الائـــتلاف المقابـــل $N\text{-}S = \{3\}$ فـــسيلعب الاســـتراتيجية المختلطة $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ لـــ (G , R) ويحصل على $-\upsilon=\frac{-10}{3}$. وبذلك فإن قـــيم الدالـــة المميزة ستكون :

$$\vartheta(\{1,2\})=\frac{10}{3} \quad , \quad \vartheta(\{3\})=\frac{-10}{3}$$

كـــذلك نجد أن مصفوفة العوائد للائتلاف $S = \{1 , 3\}$ مقابل الائـــتلاف $N\text{-}S = \{2\}$ كما يلي :

$$S=\{1,3\}\begin{matrix} \\ GG \\ GR \\ \\ RG \\ RR \end{matrix}\begin{matrix} N\text{-}S=\{3\} \\ G \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ -1 \\ -3 \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}= G_2$$

و G_2 يمكن اختصارها بواسطة الهيمنة إلى :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبذلك فـــإن الائتـــلاف $S = \{1 , 3\}$ سيلعب الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$ لـــ (GG , GR , RG , RR) ويحصـــل على القيمة $\upsilon=\frac{-1}{2}$ ، أما الائتلاف المقابـــل

{2} = N-S فسيلعب الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ لـ (G , R) ويحصل على القيمة $-\upsilon=\frac{1}{2}$. وبذلك فإن :

$$\vartheta(\{1,3\})=\frac{-1}{2} \quad , \quad \vartheta(\{2\})=\frac{1}{2}$$

وبطريقة مماثلة نجد أن على الائتلاف {2 , 3} = S أن يلعب الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$ لـ (GG , GR , RG , RR) ويحصل على $\upsilon=\frac{-1}{2}$ وأن على الائتلاف المقابل {1} = N-S أن يلعب الاستراتيجية المختلطة $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ويحصل على القيمة $\upsilon=\frac{1}{2}$ وبذلك فإن $\vartheta(\{1\})=\frac{1}{2}$, $\vartheta(\{2,3\})=\frac{-1}{2}$.

والخلاصة ... نجد أن الدالة المميزة ϑ (.) = ϑ تعطى كما في الجدول التالي :

S	ϕ	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
ϑ (S)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

جدول (3-4) الدالة المميزة لمثال (3-4)

ويمكننا التحقق من الجدول الأخير أن المباراة في هذا المثال هي أساسية .

مثال (4-4)

من المعروف أن عدد الأعضاء في مجلس الأمن الدولي هو 15 عضواً ، يمتلك خمسة منهم حق النقض (الفيتو) ويسمون بالأعضاء الدائمين لكي يتم إقرار مشروع ما ، فلابد أن يوافق عليه ثلثي الأعضاء منهم الأعضاء الخمسة الدائمين . ولتبسيط المسألة دعنا نقصر العدد الكلي لأعضاء مجلس الأمن إلى خمسة ونعتبر أن اثنين منهم فقط يمتلكون حق النقض ولنفترض أنه لكي يتم إقرار مشروع أي قرار فلابد أن يحظى بموافقة ثلاثة من خمسة منهم الاثنين الذين يمتلكون حق النقض الفيتو . فإذا أعطينا القيمة 1 للحالة التي يتم فيها إقرار مشروع والقيمة 0 للحالة التي لا يتم فيها الإقرار ،

وإذا إفترضنا أن اللاعبين 1 و 2 هما اللذان يمتلكان حق النقض فمن الواضح أن الدالة المميزة ستكون كما يلي :

إذا كـــانت S مكونة من 3 عناصر أو أكثر وتحوي {1,2} فإن ϑ (S) = 1 و إلا فإن ϑ (S) = 0 من أجل أي مجموعة جزئية أخرى S من {1,2,3,4,5} ويمكننا التحقـق بسهولة أن هذه المباراة غير أساسية .

مثال (4-5)

يرغب ثلاثة أشخاص 1, 2, 3 باقتناء التحف الفنية لدى الـشخص الأول تحفـة فنية قدر ثمنها بـ 2000 $ وليس لدى الثاني حالياً أي تحفة فنية ولكنه يرغب باقتنـاء واحدة فقط بقيمة 6000 $ أما الشخص الثالث فلديه تحفة بقيمة 4000 $ ويرغب باقتناء أخرى بقيمة 3000 $. إذا إفترضنا أنه يمكن للأشخاص الثلاثة أن يبيعوا أو يـشتروا هذه التحف من بعضهم البعض عندئذٍ تكون الدالة المميزة (للتسهيل سنستخدم 2 بـدلاً من 2000 $ وهكذا) .

$\vartheta(\phi) = 0$

$\vartheta(\{1\}) = 2$ وذلك إذا احتفظ الشخص الأول بتحفته .

$\vartheta(\{2\}) = 0$ وذلك لأن الشخص الثاني لا يمتلك تحفة بعد .

$\vartheta(\{3\}) = 4$ وذلك إذا احتفظ الشخص الثالث بتحفته .

$\vartheta(\{1,2\}) = 6$ وذلك إذا باع الأول للثاني تحفته .

$\vartheta(\{1,3\}) = 7$ وذلك إذا باع الأول للثالث تحفته .

$\vartheta(\{2,3\}) = 6$ وذلك إذا باع الثالث للثاني تحفته .

$\vartheta(\{1,2,3\}) = 10$ وذلك إذا باع الأول للثاني وأبقى الثالث على ما معه .

(لاحظ أن احتمال أن يبيع الثالث للثاني غير ممكن لأن الثالث يرغب أصـلاً باقتنـاء تحفتين) . لاحظ كذلك أن هذه المباراة غير أساسية لأن :

$$\vartheta(\{1,2,3\}) = 10 = \vartheta(\{1,2\}) + \vartheta(\{3\}) = 6+4$$

يتبين من المثال الأخير أنه ستكون لدينا نفس المباراة فيما لو قدرت أثمان التحف الفنية بأي عملة أخرى غير الدولار كالريال السعودي مثلاً وحيث أن

$1 = 3.75 ريال

فإن ذلك يكافيء استبدال الدالة (.) ϑ بدلالة أخرى (.) ϑ_1 بحيث أن

$$\vartheta_1(S) = 3.75\ \vartheta(S)$$

من أجل أي $S \subset N = \{1,2,3\}$

وبالمثل فإن المباراة لا تتغير لو قام اللاعب i بزيادة قدرها a_i في ثمن التحفة الفنية التي تروقه فإن ذلك يكافيء استبدال الدالة (.) ϑ بدلالة أخرى (.) ϑ_2 بحيث أن :

$$\vartheta_2(S) = \vartheta(S) + \sum_{i \in S} a_i$$

وتقودنا هاتين الملاحظتين إلى تعريف ما يسمى التكافؤ الاستراتيجي Strategically Equivalence بين الدوال المميزة .

تعريف (4-2)

نقول عن دالتين مميزتين ϑ و ϑ_0 لمباراة تعاونية متعددة الأطراف أنهما متكافئين استراتيجياً إذا كان :

$$\vartheta_0(S) = c\vartheta(S) + \sum_{i \in S} a_i \qquad (4.7)$$

ويقود ذلك أيضاً إلى أن لكل مباراة تعاونية متعددة الأطراف مجموعة أو صف (Class) من الدوال المميزة وأن أياً منها يصلح للتعبير عن المباراة . ومن جهة ثانية فإن التكافؤ بين ϑ_0 و ϑ في العلاقة (4.7) يساعد في اختيار a_i و / أو C ، بطريقة نجعل معها

$$\vartheta_0(\{i\}) = 0 \quad \text{من أجل } i = 1, 2, .., n$$

$$\vartheta_0(N) = 1 \quad \text{و}$$

ولكن ذلك لن يكون ممكناً إلا في المباريات الأساسية [نذكر بالعلاقة (4.6) الخاصة بالمباريات غير الأساسية] .

وضحنا أعلاه أن أي ائتلاف يسعى إلى جعل عائده الكلي أكبر ما يمكن ولكن هذا يعيدنا إلى السؤال الرئيسي المهم فيما يخص الائتلافات وهو كيف يمكن توزيع العوائد ضمن الائتلاف الواحد ؟ للإجابة : سوف نقدم أولاً تعريف ما يسمى القسمة الرضائية أو التقسيمية بأنها أي توزيع " معقول للعائد الكلي لائتلاف بين أطراف هذا

الائتلاف ونعني بكلمة " معقول " أنه يرضي جميع أطراف الائتلاف . أمـا رياضـياً فتعرف كما يلي :

تعريف (4-3)

إذا كانت ϑ هي الدالة المميزة لمباراة تعاونية بين n من الأطراف . فإننا نقول عن المتجه $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ أنه قسمة رضائية أو " تقسيمية " (Imputation) بـين هـذه الأطراف إذا تحقق ما يلي :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \vartheta(N) \qquad (4.8)$$

$$x_i \geq \vartheta(\{i\}) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.9)$$

وسنرمز بالرمز $I(\vartheta)$ لمجموعة التقسيمات لمباراة دالتها المميزة $\vartheta(.)$ إن x_i الواردة في التعريف الأخير تمثل عائد اللاعب i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ، أما $\vartheta(N)$ فتمثل أقصى ما يمكن أن يحصل عليه جميع اللاعبين إذا تعاونوا جميعاً ولذا وبشكل عـام نجـد أن العلاقة (4.9) تعني أن ما يحصل عليه أي لاعب (عائـد ذلـك اللاعـب) ضـمن المجموعـة سـيكون أفضـل من العـائد الذي يمكـن أن يحـصل عليـه إذا لعـب بمفـرده . أمـا العـلاقة (4.8) فيشـار إليها باسـم شـرط الأمثلية لبـاريتو (Poreto optimality condition) . ولإيجاد $I(\vartheta)$ علينا إيجـاد مجموعـة جميـع التقسيمات التي تحقق العلاقتين (4.8) و (4.9) معاً . فبالإشارة إلى المثـال (4-4) مثلاً نجد أن

$$I(\vartheta) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \vartheta(N) = 1$$
$$\&$$
$$x_i \geq \vartheta(\{i\}) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5\}$$

من الواضح من التعريف أعلاه للتقسيمه أنها تعتمد على الدالة المميزة $\vartheta(.)$ للمباراة ، بمعنى أنها قد تختلف من دالة مميزة لأخرى وكذلك فمن الواضح أنه إذا لم تتغير الدالة المميزة للمباراة فإن العائد الكلي $\vartheta(N)$ لجميع اللاعبين سيبقى نفسه مـن أجـل أي تقـسيمتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ لأن $\sum_{i=1}^{n} x_i = \vartheta(N) = \sum_{i=1}^{n} y_i$ ومـا يمكن أن يكون هو أن التقسيمة الأولى قد تكون أفضل أو أسـوأ مـن الثانيـة لـبعض الأعضاء والعكس صحيح بالنسبة لباقي الأعضاء . فلو كان مـثلاً $x_3 > y_3$ و $x_1 < y_1$

فإن ذلك يعني أن الأولى أفضل للاعب الثالث من الثانية بينما هي أسوء للاعب الأول من الثانية والعكس صحيح بالنسبة لبقية اللاعبين .

ولكن التقسيمتين متكافئتين بالنسبة لمجموعة اللاعبين ككل لأن مجموع كل منهما يجب أن يساوي $\vartheta(N)$ كما أشرنا أعلاه . إذاً ، ما يمكن أن يكون هو أن أحد التقسيمات $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ أفضل لائتلاف ما S $(S \subset N)$ من تقسيمة أخرى $\overline{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ حيث نقول عندئذٍ أن $\overline{X}$ تهيمن على $\overline{Y}$ بالنسبة لـ S . والتعريف الرياضي لذلك هو كما يلي :

تعريف (4-4)

نقول أن التقسيمة $\overline{X}$ تهيمن على التقسيمة $\overline{Y}$ بالنسبة للائتلاف S ضمن المباراة التي دالتها المميزة $\vartheta(.)$ إذا كان

$$S \ni i \text{ من أجل أي } x_i > y_i \qquad (4.10)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \vartheta(S) \qquad (4.11)$$

وكمثال على ذلك دعنا نعود إلى مثال (4ـــ4) ولنأخذ الإئتلاف $S = \{1,2,3\}$. لقد أوضحنا أن $\vartheta(S) = 1$ لأي مجموعة جزئية S من $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ مؤلفة من ثلاثة أعضاء فأكثر شريطة أن تضم العضوين 1,2 وأن $\vartheta(S) = 0$ فيما عدا ذلك . فلو أخذنا التقسيمتين :

$$\overline{Y} = (0,0,0,1,0) \quad , \quad \overline{X} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)$$

[لاحظ أن كلاً من $\overline{Y}, \overline{X}$ يحقق العلاقتين (4.8) و (4.9)] فإننا نجد أنهما تحققان العلاقتين (4.10) و (4.11) بالنسبة للائتلاف $S = \{1, 2, 3\}$ ولذا فإن $\overline{X}$ تهيمن $\overline{Y}$ بالنسبة لهذا الائتلاف ، وقد نصادف تقسيمين $\overline{Y}, \overline{X}$ تكون الأولى فيها مهيمنة على الثانية بالنسبة للائتلاف S_1 بينما تهيمن الثانية على الأولى بالنسبة لائتلاف آخر S_2 ، فلو عدنا إلى مثال (4ـــ4) مثلاً وأخذنا التقسيمتين :

$$\overline{Y} = (0,0,\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \quad , \quad \overline{X} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0)$$

فإن $\overline{X}$ تهيمن على $\overline{Y}$ بالنسبة للائتلاف $S_1 = \{1,2,3\}$ ولكن $\overline{Y}$ تهيمن على $\overline{X}$ بالنسبة للائتلاف $S_2 = \{4,5\}$ ويقودنا ذلك إلى التعريف التالي :

تعريف (4-5)

نقول إن التقسيمة $\overline{X}$ تهيمن على $\overline{Y}$ إذا وجد ائتلاف S واحد على الأقل بحيث أن $\overline{X}$ تهيمن على $\overline{Y}$ بالنسبة لهذا الائتلاف ، وسنرمز لذلك عندئذٍ بالرمز $\overline{X} \succ \overline{Y}$. فلو أخذنا التقسيمتين $\overline{X}, \overline{Y}$ الأخيرتين فإن $\overline{X} \succ \overline{Y}$ بالنسبة للائتلافات $S_1 = \{1,2\}$ و $S_2 = \{1,2,3\}$.

قلب مباراة The Core

من الواضح أن التعريف (4-5) أعلاه يقود إلى سؤال هام فيما يخص المباريات التعاونية المتعددة الأطراف وهو : هل توجد تقسيمة لأي ائتلاف تهيمن على كافة التقسيمات الممكنة لهذا الائتلاف ؟ وبالطبع فإن وجود مثل هذه التقسيمة سيكون أمراً مرغوباً لكافة الائتلافات الخاصة بمباراة متعددة الأطراف لأن عائد أي ائتلاف فيها سيكون هو الأفضل مقارنة مع العائد الناتج عن أي تقسيمة أخرى . ويطلق على مجموعة التقسيمات هذه اسم قلب (Core) المباراة وسنرمز بالرمز $C(\vartheta)$ لقلب مباراة دالتها المميزة $\vartheta(.)$. وتتميز عناصر المجموعة $C(\vartheta)$ لأي مباراة بخاصيتين أساسيتين تعطيهما النظرية التالية :

نظرية (4-2)

تتكون المجموعة $C(\vartheta)$ من مجموعة جميع التقسيمات $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ التي تحقق الخاصيتين التاليتين معاً :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \vartheta(N) \quad \text{لأي } S \subset N \qquad (4.12)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \vartheta(S) \qquad (4.13)$$

نلاحظ أن العلاقة (4.12) هي تكرار للعلاقة (4.8) وأن العلاقة (4.9) (التي يجب أن تتحقق من اجل أي تقسيمه) لا تقود بالضرورة إلى (4.13) ما لم تكن المباراة غير أساسية ، ولذا فقد نجد أن المجموعة $C(\vartheta)$ خالية في كثير من المباريات وتصح هذه

الحقيقة الأخيرة من أجل المباريات الأساسية ذات المجموع الثابت (تكافيء مباريات ذات مجموع صفري كما أوضحنا أعلاه) وسنبين ذلك فيما يلي :

لو افترضنا أن $C(\vartheta) \neq \phi$ بالنسبة لمباراة أساسية وذات مجموع ثابت عندئذٍ يوجد على الأقل $\overline{X} \ni C(\vartheta)$ حيث $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. وبحسب العلاقة (4.13) نجد عندئذٍ

$$\sum_{i=2}^{n} x_i \leq \vartheta(\{2,3,...,n\})$$

وبما أن $\overline{X}$ هي تقسمه فإن $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i = \vartheta(N)$

كذلك فإن $\sum_{i=2}^{n} x_i \geq \vartheta(N) - \vartheta(1)$

وبطرح العلاقة الأخيرة من سابقتها نجد :

$$x_1 \leq \vartheta(1)$$

وبطريقة مماثلة نجد $x_i \leq \vartheta(\{i\})$ من أجل $i = 1, 2, \ldots, n$ والتي تقود إلى

$$\vartheta(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\{i\})$$

الأمر الذي يتناقض مع كون المباراة أساسية حيث يجب أن يكون $\vartheta(N) > \sum_{i=1}^{n} \vartheta(\{i\})$. فمثلاً المباراة في مثال (4-3) تتصف بأنها ذات مجموع صفري وأنها أساسية ولذلك فإن $C(\vartheta) = \phi$ لهذه المباراة .

ننتقل الآن إلى إيجاد $C(\vartheta)$ لبعض المباريات اعتماداً على الشرطين (4.12) و (4.13) .

مثال (6ـ4)

بالعودة إلى مثال (4ـ4) الخاص بالتصويت في مجلس الأمن فقد وجدنا أنها مباراة غير أساسية وأن $\vartheta(S) = 1$ إذا كانت S مكونة من ثلاثة أعضاء فأكثر بما في ذلك العضوين 1, 2 وأن $\vartheta(S) = 0$ عدا ذلك . حيث S هي مجموعة جزئية من

المجموعـــة $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ لنفـــرض أن $C(\vartheta) \ni (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{X}$ عندئذٍ فإن الشرط (4.12) يقتضي

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \vartheta\ (N) = 1$$

ومن الشرط (4.13) نجد ما يلي

$$x_i \geq \vartheta\ (\{i\}) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \vartheta\ (\{1, 2, 3\}) = 1,\ x_1 + x_2 + x_4 \geq \vartheta\ (\{1, 2, 4\}) = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_5 \geq \vartheta\ (\{1, 2, 5\}) = 1$$

ومن هذه العلاقـــات جميعاً نجد أن $x_1 + x_2 = 1$ وأن $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ولذلك فـــإن $C\ (\vartheta)$ لهذه المباراة يعطى كما يلي :

$$C\ (\vartheta) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_3 = 1,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0\}$$

أو

$$C\ (\vartheta) = \{(\alpha, 1-\alpha, 0, 0, 0)\ ;\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \qquad (4.14)$$

وتعني هذه النتيجة أن التقسيمات التي تضم العضوين 2 ,1 ستكون هي المهيمنة علـــى أي تقســـيمات أخـــرى . وتبدو هذه النتيجة منطقية بموجب الفرضيات الواردة في مثال (4 ــ 4) .

مثال (4-7)

بالعودة إلى مثال (4-5) الخاص بالأشخاص الثلاثة الذين يرغبون باقتناء تحـــف فنية ، فإذا إفترضنا أن $C(\vartheta) \ni \overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ كان لدينا ما يلي :

من الشرط (4.12) فإن :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \vartheta\ (N) = (\{1, 2, 3\}) = 10$$

ومن الشرط (4.13) فإن :

$$x_3 \geq 4 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_1 \geq \vartheta\ (\{1\}) = 2$$
$$x_2 + x_3 \geq 6 \quad , \quad x_1 + x_3 \geq 7 \quad , \quad x_1 + x_2 \geq 6$$

ومن المساواة الأولى والمتباينات الأخيرة نجد :

$$x_3 + 6 \leq x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

والتي تقــود إلى $x_3 \le 4$ ، وبدمــج هــذه مع $x_3 \ge 4$ نجــد أن $x_3 = 4$ ، لــذا فــإن $x_1 + x_2 = 6$ وكذلك فإن $x_3 = 4$ تقود مع $x_1 + x_3 \ge 7$ إلى $x_1 \ge 3$ و $x_3 = 4$ تقود مع $x_2 + x_3 \ge 6$ إلى $x_2 \ge 2$ ولذا فإن :

$$C(\vartheta) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \ge 3, x_2 \ge 2, x_1 + x_2 = 6, x_3 = 4\}$$

أو

$$C(\vartheta) = \{(3 + \alpha, 3-\alpha, 4) ; 0 \le \alpha \le 1\} \qquad (4.15)$$

فالتقسيمات التي من الشكل $\overline{X} = (3+\alpha, 3-\alpha, 4)$ (حيث $0 \le \alpha \le 1$) فــي هــذه المباراة هي المهيمنة على أي تقسيمات أخرى . وتشكل هذه التقسيمات قلب المباراة .

المجموعات المستقرة (Stable sets) :

ومع أن قلب المباراة يعطينا مجموعة من التقسيمات هي الأفضل مقارنــة مــع غيرها من التقسيمات إلا أن فون نيومان ومورجنسترن قد اقترحا مفهوماً أكثر شــمولية لهذا النوع من التقسيمات التي تتصف بالهيمنة على غيرها . فقد اقترحا تقديم مفهوم ما يسمى بالمجموعات المستقرة (Stable set) والذي نقدمه فينا يلي :

تعريف (4ــ4)

إذا كانت لدينا مباراة تعاونية دالتها المميزة $\vartheta(.)$ فإن مجموعة الاستقرار لهــذه المباراة والتي سنرمز لها بالرمز $S(\vartheta)$ هي مجموعة جميع التقسيمات التــي تحقــق الشرطين التاليين :

(I) لا يمكــن لأي تقسيمه من $S(\vartheta)$ أن تهيمن على تقســيمه أخرى فيها (خاصية الاستقرار الداخلي) .

(II) توجــد على الأقــل تقسيمه من $S(\vartheta)$ تهيمن على أي تقسيمه ليست من $S(\vartheta)$ (خاصية الاستقرار الخارجي) .

وتوضيحاً لهذا التعريف نعود إلى المباراة في مثال (4ــ4) فنجد أن كلاً مــن المجموعات التالية هي مجموعات مستقرة

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_{1+} x_2 + x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_4 = 1, x_3 = x_5 = 0\}$$
$$S_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_5 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$$

لأن كـلاً منها يحقـق الشرطين (I) و (II) . فمثلاً لو أخذنا $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3, 0, 0)$ و $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3, 0, 0)$ من S_1 فـلا يمـكن أن يكون $x_i > y_i$ أو $y_i > x_i$ من أجل $i = 1,2.3$ لأن $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3$ وبذلك تتحقق الخاصية (I) ولو أخذنا $\overline{Z} = (\Im_1, \Im_2, \Im_3, \Im_4, \Im_5)$ليست من S_1 فلا يمكن أن تهيمن على $\overline{X}$ من S_1 وبـذلك تتحقق (II) .

ولو عدنا إلى مثال (4.6) فقد وجدنا أن قلب هذه المباراة $C(\vartheta)$ معطى كمـا في (4.14) ويمكننا أن نلاحـظ بسـهولة أن $C(\vartheta)$ هـذا هـو مجموعة جزئية من S_1 و S_2 و S_3 وبالتالي فإن $C(\vartheta)$ هو مجموعة جزئية مـن تقاطعهـا $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ وهذه الحقيقة صحيحة بشكل عام لأي مباراة أي أنه :

إذا كـانت لدينا مـباراة تعـاونية متعـددة الأطـراف دالتها المميزة هي ϑ وكانـت S_1 ، S_2 ، ... ، S_m مجموعات مستقرة لهذه المباراة فإن :

$$C(\vartheta) \subseteq S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_m \qquad (4.16)$$

نواة مباراة (Nucleus)

كما هو ملاحظ أعلاه فإن قلب مباراة $C(\vartheta)$ قد يتكون من أكثر من عنصر كما هي الحال في $C(\vartheta)$ المعطى في كل من العلاقتين (4.14) و (4.15) وكذلك فقـد تتعدد المجموعات المستقرة في مباراة الأمر الذي قد يخلق نوعاً من الالتباس في إيجاد حل محدد للمباراة . ولقد قدم سكميدلر Schmeidler عام (1969) مفهوماً جديـداً لحل المباريات التعاونية المتعددة الأطراف أسماه نواة Nucleus المباراة . وكما سنرى أدناه فإن نواة مباراة تعاونية تتكون من تقسيمة واحدة فقط . ومن شأن هذه التقسيمة أنها تجعل قناعة أي ائتلاف بما حصل عليه أفضل ما يمكن .

ويعتمد مفهوم نواة مـباراة على التحليل التالي : لو أخذنا ائتلافاً ما S وتقسيمة ما $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ولو فرضنا أن $\overline{X}(S) = \sum_{i \in S} x_i$ فإن $\overline{X}(S)$ يمثل مـا يحـصل

عليه الائتـــلاف S في هذه التقسيمة ، كما أن ϑ (S) هو ما يحصـــل عليه الائتلاف S نفسه عندما يتعاونون بينهم ومن ذلك نجد أنه كلما كان الفرق $\vartheta(S)-\overline{X}(S)$ كبيراً فإن ذلك لن يكون مرضياً للائتلاف S . لنعرف

$$L(\overline{X})=\vartheta(S)-\overline{X}(S) \qquad (4.17)$$

عندئذٍ يكون هدف أي ائتلاف تصغير أكبر الدوال $L(\overline{X})$ الناتجة عن كافة الائتلافـــات الممكنة . علينا أن نلاحظ أن $L(\overline{X})$ لها 2^n من المكونات (Componets) وذلك بقدر عدد الائتلافات S من N المكون من n عنصراً ، أي أن $L(\overline{X})$ هي من الشكل

$$L(\overline{X})=\left(L_1(\overline{X}),L_2(\overline{X}),...,L_{2n}(\overline{X})\right) \qquad (4.18)$$

ومن أجل تقسيمتين $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ فإننا نعرف العلاقة التالية :

$$L(\overline{X})<L(\overline{Y})\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}L_K(\overline{X})=L_k(\overline{Y});k=1,2,...,i-1\\ L_i(\overline{X})<L_i(\overline{Y}) \qquad \text{و}\end{Bmatrix} \qquad (4.19)$$

فإذا كان $L(\overline{X})<L(\overline{Y})$ فإن ذلك يكافيء

$$\vartheta(S)-\overline{X}(S)<\vartheta(S)-\overline{Y}(S)$$

وعندئذٍ تكون التقسيمة $\overline{X}$ أفضل للائتلاف S من التقسيمة $\overline{Y}$ وذلك مـــن أجـــل كافـــة الائتلافات S (وعددها 2^n) . وتشكل جميع التقسيمات المفـــضلة لكافـــة الائتلافـــات بالمعنى الموضح أعلاه ما يسمى " نواة المباراة " . ومن أجل مباراة تعاونيـــة متعـــددة الأطـــراف دالتها المميزة $\vartheta(.)$ ومجموعة تقسيماتها $I(\vartheta)$ فإن نواتها والتي سنرمز لهـــا بالرمز $N(\vartheta)$ تعرف رياضياً كما يلي :

تعريف (4-5)

$$N(\vartheta)=\{\overline{X}\in I(\vartheta):L(\overline{X})<L(\overline{Y});\forall\overline{Y}\in I(\vartheta)\} \qquad (4.20)$$

وتتمتع نواة أي مباراة بخاصتين أساسيتين موضحتين في النظرية التالية

نظرية (4-3)

(i) لأي مباراة تعاونية متعددة الأطراف نواة واحدة فقط .

(ii) إذا كان $C(\vartheta) \neq \phi$ فإن النواة هي جزء من $C(\vartheta)$.

ملاحظة (4-1)

(أ) ذكرنا أعلاه أن $C(\vartheta) = \phi$ من أجل أي مباراة ذات مجموع صفري وهو ما يبرر ذكر الشرط $C(\vartheta) \neq \phi$ في الخاصية (ii) من النظرية أعلاه .

(ب) إذا لم تتغير قيم الدالة $\vartheta(S)$ إذا بادلنا بين وضع بعض اللاعبين في الائتلاف S فإننا نقول أن هؤلاء اللاعبين يقبلون التبادل . فمثلاً نجد في مثال (4ـ4) أن اللاعبين 1 و 2 يقبلان التبادل وأن اللاعبين 3 و 4 و 5 يقبلون التبادل . ونقول في مثل هذه الحالات أن الدالة $\vartheta(S)$ متناظرة بالنسبة لهؤلاء اللاعبين . ومن تعريف $L(\overline{X})$ في (4.17) وتعريف $N(\vartheta)$ في (4.20) نجد أنه إذا كانت $\vartheta(S)$ متناظرة بالنسبة لمجموعة من اللاعبين فإن $N(\vartheta)$ تكون أيضاً متناظرة بالنسبة لنفس المجموعة من اللاعبين .

جـ ـ بموجب الخاصية (ii) فإن $N(\vartheta) \subseteq C(\vartheta)$ والذي يعني أن كل عنصر من $N(\vartheta)$ هو أيضاً من $C(\vartheta)$ وبحسب تعريف $\overline{X}(S)$ والعلاقة (4.13) فإن $L(\overline{X}) \leq 0$ لأي $\overline{X} \ni N(\vartheta)$. ولتوضيح فكرة النواة وخاصيتيها (i) و (ii) في النظرية (3ـ4) نسوق المثال التالي :

مثال (4-8)

بالعودة إلى المثالين (4ـ4) و (4-6) فكما أشرنا في الملاحظة (4-1) أعلاه فإن الدالة $\vartheta(S)$ متناظرة بالنسبة للاعبين 1 و 2 وكذلك بالنسبة للاعبين 3 و 4 و 5 وبموجب الملاحظة (1ـ4) نجد كذلك أن $N(\vartheta)$ تحقق نفس خاصية التناظر . فلإيجاد $N(\vartheta)$ علينا إذاً أن نبحث عن مجموعة من التقسيمات $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ بحيث أن $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ والتي تحقق خاصية التناظر بالنسبة للاعبين 1 و 2 فهي إذاً من الشكل $\overline{X} = (x, x, x_3, x_4, x_5)$ حيث $0 \leq x \leq 1/2$ (نذكر بأن عناصر $N(\vartheta)$ هي من $C(\vartheta)$ وقد وجدنا أن عناصر

$C(\vartheta)$ هي من الشكل المعطى بالعلاقة (4.14) بالنسبة للاعبين 3 و 4 و 5 فهي إذاً من الشكل

$$\overline{X} = \left(x, x, \frac{1}{3}(1-2x), \frac{1}{3}(1-2x), \frac{1}{3}(1-2x) \right) \qquad (4.21)$$

وذلك لأن $0 \le x \le 1/2$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. ولإيجاد $N(\vartheta)$ علينا أن نحسب قيمة $L(\overline{X}) = \vartheta(S) - \overline{X}(S)$ من أجل أي $\overline{X}$ المعطاة في (4.21) ثم نبحث عن أقل قيمة لها وذلك من أجل كافة الائتلافات S لهذه المباراة والتي عددها $\overset{5}{2} = 32$ ، ولكننا وجدنا أن $\vartheta(S) = 1$ لكافة الائتلافات المكونة من 3 أعضاء فأكثر شريطة أن تضم العضوين 1 و2 وأن $\vartheta(S) = 0$ خلاف ذلك . ويمكننا تسهيل إجراء الحسابات كما يلي :

(أ) الائتلافات المكونة من عضو واحد وعددها $\overset{5}{(1)} = 5$ وفيها $\vartheta(S) = 0$ ، أما $\overline{X}(S)$ فتحسب كما يلي :

$\overline{X}(S) = x$ إذا كان العضو هو 1 أو 2 وعندها $L(\overline{X}) = -x \le 0$

$\overline{X}(S) = \frac{1}{3}(1-2x)$ إذا كان العضو هو 3 أو 4 أو 5 وعندها $L(\overline{X}) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

(ب) الائتلافات المكونة من عضوين وعددها $\overset{5}{(2)} = 10$ وفيها $\vartheta(S) = 0$ وتحسب $\overline{X}(S)$ كما يلي :

$\overline{X}(S) = 2x$ إذا كان $S = \{1 , 2\}$ وعندها $L(\overline{X}) = -2x \le 0$

$\overline{X}(S) = x + \frac{1}{3}(1-2x)$ إذا كان S يضم 1 أو 2 وواحداً من الباقي $\{3, 4, 5\}$ وعندها $L(\overline{X}) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x \langle 0$.

$\overline{X}(S) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x$ إذا كان S يضم أي اثنين من $\{3,4,5\}$ وعندها $L(\overline{X}) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x$.

جـ) الائتلافات المكونة من ثلاثة أعضاء وعددها $\binom{5}{3}=10$ وفيها $\vartheta(S)=1$ لتلك التي تضم 1 و 2 وتحسب $\overline{X}(S)$ كما يلي :

$\overline{X}(S)=2x+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}x$ إذا كان S يضم 1 و 2 مع عضو من $\{3, 4, 5\}$ وعندها $L(\overline{X})=1-(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x)=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}x$.

$\overline{X}(S)=x+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x$ إذا كان S يضم 1 أو 2 مع عضوين من $\{3, 4, 5\}$ وعندها $\vartheta(S)=0$ و $L(\overline{X})=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}<0$ من أجل $0\le x\le 1/2$ ، $\overline{X}(S)=1-2x$ إذا كان S يضم الأعضاء $\{3, 4, 5\}$ وعندها $\vartheta(S)=0$ و $L(\overline{X})=2x-1$.

د) الائتلافات المكونة من أربعة أعضاء وعددها $\binom{5}{4}=5$ وفيها $\vartheta(S)=1$ إذا كانت S تضم 1 أو 2 والأعضاء $\{3, 4, 5\}$. ونحسب $\overline{X}(S)$ كما يلي :

$\overline{X}(S)=x+1-2x=1-x$ إذا كان S يضم 1 أو 2 والأعضاء $\{3, 4, 5\}$ وعندها $\vartheta(S)=0$ و $L(\overline{X})=x-1<0$ من أجل $0\le x\le\frac{1}{2}$.

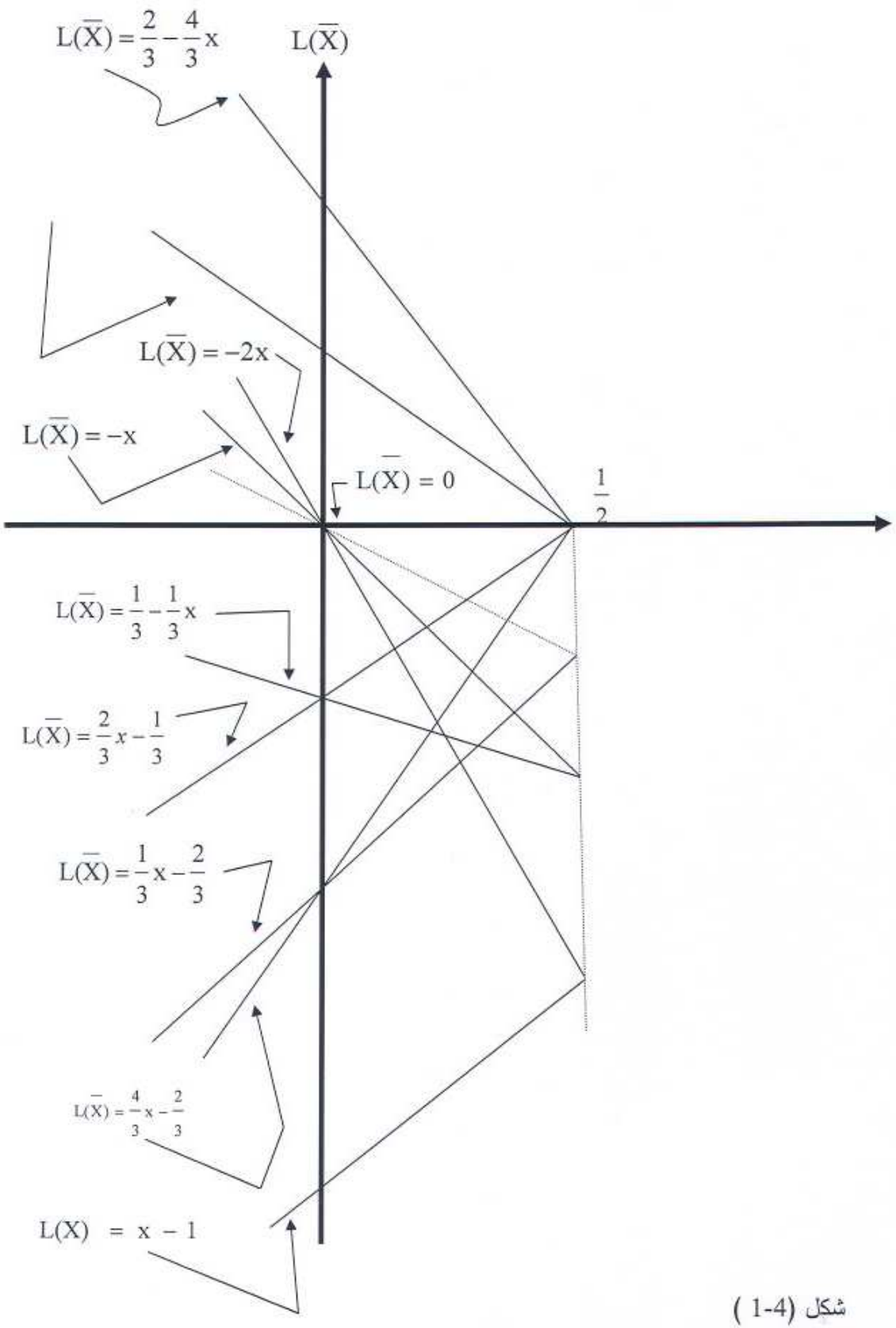
$\overline{X}(S)=2x+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}x$ إذا كان S يضم 1 و 2 واثنين من $\{3, 4, 5\}$ وعندها $L(\overline{X})=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$.

هـ) الائتلاف المكون من الأعضاء الخمسة مجتمعين وفيه :

$\vartheta(S)=1$ و $\overline{X}(S)=2x+1-2x=1$ ، ومنه $L(\overline{X})=0$

و) الائتلاف $S=\phi$ وفيه $\overline{X}(S)=0$ و $\vartheta(S)=0$ ومنه $L(\overline{X})=0$.

وكما هو ملاحظ فإن الدوال $L(\overline{X})$ كدوال في x تمثل مستقيمات وجميعها موضحة كما في الشكل (1ـ4) . وما يهمنا هنا أن نبحث عن أصغر قيمة لأعلى (أي لأكبر) هذه المستقيمات والتي تتمثل في المستقيم التالي $L(\overline{X})=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}x$. ومن الشكل (4-1) نجد أن $L(\overline{X})$ في هذا المستقيم يبلغ أقل قيمة له من أجل $x=\frac{1}{2}$ والتقسيمة المقابلة


$L(\overline{X}) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x$
$L(\overline{X})$
$L(\overline{X}) = -2x$
$L(\overline{X}) = -x$
$L(\overline{X}) = 0$
$\frac{1}{2}$
$L(\overline{X}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x$
$L(\overline{X}) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
$L(\overline{X}) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
$L(\overline{X}) = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$
$L(X) = x - 1$

شكل (4-1)

لذلك هي $\overline{X} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ ، ولذا فإن نواة المباراة في مثال (4ـ4) مكونة من هذه التقسيمة ، أي أن :

$$N(\vartheta) = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)\right\} \qquad (4.22)$$

دوال قيم شابلي Shapley Function Values

ثمة مفهوم رابع لحل المباريات التعاونية اقترحه شابلي عام (1953) وقد بنى اقتراحه هذا على ما يمكن أن يتوقعه كل طرف في مباراة تعاونية قبل بدءها . ففي مباراة تعاونية دالتها المميزة $\vartheta(.)$ وعدد أطرافها n رمز شابلي بالرمز $h_i(\vartheta)$ ما يمكن أن يتوقعه اللاعب " i " $i = 1, 2, \ldots, n$ ثم وضع ثلاثة شروط على الدالة $h_i(\vartheta)$ هي :

(ش$_1$) : يجب أن تكون $h_i(\vartheta)$ مستقلة عن ترتيب اللاعب i في المجموعة التي تشمل جميع اللاعبين .

(ش$_2$) : $\sum_{i=1}^{n} h_i(\vartheta) = \vartheta(N)$ أي أن مجموع توقعات اللاعبين تساوي أقصى ما يمكن أن يحصل عليه جميعاً كائتلاف واحد .

(ش$_3$) : إذا كان $\vartheta(.)$ و $u(.)$ هما الدالتين المميزتين لاثنين من المباريات و$u(.) + \vartheta(.)$ هي الدالة المميزة للمباراة الناتجة عن لعب هاتين المباراتين فإن :

$$h_i(u + \vartheta) = h_i(u) + h_i(\vartheta)$$

وضمن هذه الشروط فقد أثبت شابلي صحة النظرية التالية :

نظرية (4ـ4)

من أجل أي لاعب i في مباراة تعونية عدد أطرافها n ودالتها المميزة $\vartheta(.)$ توجد دالة وحيدة $h_i(\vartheta)$ تحقق الشروط (ش$_1$) و (ش$_2$) و (ش$_3$) وهذه الدالة معطاة بـ :

$$h_i(\vartheta) = \sum_{i \in S} \frac{(\#S-1)!(n-\#S)!}{n!} [\vartheta(S) - \vartheta(S - \{i\})] \qquad (4.23)$$

حيث $\#S$ هو عدد اللاعبين في الائتلاف S .

تسمى الدوال (4.23) بدوال قيم شابلي . وكتوضيح لكيفية إيجاد هذه الدالة نسوق المثالين التاليين .

مثال (4-9)

بالعودة إلى مثال (4ـ4) فكما أشرنا في مثال (8ـ4) فإن $\vartheta(.)$ متناظر بالنسبة للاعبين 1 و 2 وكذلك بالنسبة للاعبين 3 و 4 و 5 ولذا فإنه سيكون لدينا :

$$h_1(\vartheta) = h_2(\vartheta) \quad \text{و} \quad h_3(\vartheta) = h_4(\vartheta) = h_5(\vartheta)$$

ولذا يكفي أن نحسب $h_1(\vartheta)$ و $h_3(\vartheta)$.

حساب $h_1(\vartheta)$:

علينا أن نحسب الطرف الأيمن لـ (4.23) من أجل كافة الائتلافات التي تضم اللاعب 1 مع ملاحظة أنه لا ضرورة لإدراج الحدود التي تتساوى فيها $\vartheta(S)$ و$\vartheta(S-\{i\})$ لأن قيمة الحد الناتج عندئذٍ تساوي الصفر فإذا تذكرنا أن $\vartheta(S)$ يأخذ القيمة 1 إذا كانت S مكونة من ثلاثة عناصرفأكثر وتضم 1 و 2 ويأخذ القيمة صفر عدا ذلك كان كافياً لنا أن نأخذ الائتلافات التالية فقط :

{1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,2,3,5}, {1,2,4,5}, {1,2,3,4,5} (وعددها 3)

ففي الائتلافات المكونة من 3 عناصر (وعددها 3) مثل $S = \{1,2,3\}$ مثلاً نجد $\#S = 3$ و $n-\#S = 2$ و $\vartheta(S) = 1$ و $\vartheta(S-\{1\}) = 0$.

وفي الائتلافات المكونة من 4 عناصر (وعددها 3) مثل $S = \{1,2,3,4\}$ مثلاً نجد $\#S = 4$ و $n-\#S = 1$ و $\vartheta(S) = 1$ و $\vartheta(S-\{1\}) = 0$.

وفي الائتلاف المكون من 5 عناصر نجد $\#S = 5$ و $n-\#S = 0$ و $\vartheta(S-\{1\}) = 0$. وبذلك يكون لدينا :

$$h_1(\vartheta) = 3\frac{2!.2!}{5!}(1-0) + 3\frac{3!.1!}{5!} + \frac{4!.0!}{5!} = \frac{9}{20} = 0.45$$

حساب $h_3(\vartheta)$:

من الائتلافات السبعة أعلاه فإن الائتلاف $S = \{1,2,3\}$ هو الذي يعطي فرقاً في قيمة $\vartheta(S)$ وقيمة $\vartheta(S-\{3\})$ وبالنسبة لهذا الائتلاف $\#S = 3$ ، $n - \#S = 2$ وبذلك يكون لدينا

$$h_3(\vartheta) = \frac{2!.2!}{5!}(1-0) = \frac{1}{30} \approx 0.0333$$

وبملاحظة أن $\frac{0.45}{0.0333} \approx 3.5$ فإن النتائج أعلاه تعني أن حق الفيتو المعطى لكل من العضوين 1 و 2 يعطيهم مكاسب تعادل 13.5 مرة من مكاسب الأعضاء 3 و 4 و 5 .

مثال (4-10)

بالعودة إلى مثال (4-5) الخاص بالأشخاص الثلاثة الذين يرغبون باقتناء تحف فنية . فاستناداً إلى قيم الدالة المميزة والتي سبق إيجادها في مثال (4-5) نجد أنها دالة غير متناظرة كما كانت عليه الحال في المثال السابق . والائتلافات التي يجب أن نأخذها بعين الاعتبار من أجل اللاعب 1 هي $\{1\}$ و$\{1,2\}$ ، $\{1,3\}$ ، $\{1,2,3\}$. وبتطبيق (4.23) على هذه الائتلافات نجد :

$$h_1(\vartheta) = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(2-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(6-2)$$
$$+ \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(7-2) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(10-6)$$

أو $$h_1(\vartheta) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{8}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

ومن أجل اللاعب 2 علينا أن نأخذ الائتلافات

$$\{1,23\} ، \{2,3\} ، \{1,2\} ، \{2\}$$

حيث نجد

$$h_2(\vartheta)=\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(0-0)+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(6-2)$$
$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(6-4)+\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(10-7)$$
$$h_2(\vartheta)=0+\frac{4}{6}+\frac{2}{6}+\frac{6}{6}=2 \qquad \text{أو}$$

ومن أجل اللاعب 3 علينا أن نأخذ الائتلافات

$$\{3\}\ ،\ \{1,3\}\ ،\ \{2,3\}\ \text{و}\ \{1,2,3\}$$

وبطريقة مماثلة نجد أن $h_3(\vartheta)=\frac{27}{6}=4.5$

وكما أشرنا أعلاه فإن $h_1(\vartheta)$ ، $h_2(\vartheta)$ ، $h_3(\vartheta)$ تشير إلى القيم المتوقعة التي يحصل عليها اللاعبين 1 ، 2 ، 3 على الترتيب قبل بدء المباراة .

ملاحظة (4-2)

ذكرنا في الملاحظة (3ـ3) من الفصل الثالث والمتعلق بالمباريات ذات المجموع غير الصفري لشخصين أن هناك علاقة بين ما أسميناه الحل بطريقة ناش (وذلك عندما تكون نقطة الأمان هي نقطة الوضع الراهن) ومفهوم دالة قيم شابلي الذي قدمناه أعلاه . ولتوضيح هذه النقطة نسوق المثال التالي :

مثال (4-11)

لدينا المباراة الثنائية التالية بين شخصين 1 و 2 :

$$G=\begin{bmatrix}(4,1) & (1,0)\\ (-1,2) & (2,3)\end{bmatrix}$$

فبالنظر إليها على أنها مباراة تفاوضية نجد أن نقطة الأمان هي $\left(\frac{3}{2},1\right)$ ولو أردنا استخدام طريقة شابلي علينا أن نبحث عن النقطة التي تجعل الدالة التالية أكبر ما يمكن

$$F(x,y)=(x-\frac{3}{2})(y-1)=(x-\frac{3}{2})(-x+5-1)=-x^2+\frac{11}{2}x-6=f(x)$$

حيث $y = -x + 5$ هي معادلة المستقيم الذي تقع عليه فئة التفاوض وهي القطعة المارة بالنقطتين (2,3) و (4,1) (تحقق من ذلك) . ولما كـان $f'(x) = -2x + \frac{11}{2} = 0$ يقع من أجل $x = \frac{11}{4}$ و $y = \frac{9}{4}$ فحل شابلي هو النقطة $(\frac{11}{4}, \frac{9}{4})$.

الآن لو نظرنا إلى المباراة كمباراة تعاونية بين اللاعبين 1 و 2 فإن مجموعـة الائتلافات الممكنة بين هذين اللاعبين هي

$$\phi , \{1\} , \{2\} , \{1,2\}$$

وعند حصول تعاون بين هذين اللاعبين فإنهما سيختاران أحد الحلـين (4,1) أو (2,3) الذي يحقـق لهما أكـبر مجمـوع ممـكن وهـو 5 ومن ثـم تتم بينهمـا صـفقات جانبية رضائية يتقاسم فيها الطرفان هذا المجموع وبذلك فإن الدالة المميزة لهذه المباراة بالنظر إليها أنها تعاونية تعطي كما يلي :

$$\vartheta(\phi) = 0,\ \vartheta(1) = \frac{3}{2},\ \vartheta(2) = 1\ ,\ \vartheta(\{1,2\}) = 5$$

لنحسب الآن كل من $h_1(\vartheta)$ و $h_2(\vartheta)$ لشابلي في هذه المباراة فنجد ما يلي

$$h_1(\vartheta) = \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!}\left(\frac{3}{2} - 0\right) + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!}(5-1)$$

$$= \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

$$h_2(\vartheta) = \frac{(1-1)!(2-1)!}{2!}(1-0) + \frac{(2-1)!(2-2)!}{2!}\left(5 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

أي أن قـيم $h_1(\vartheta)$ و $h_2(\vartheta)$ تطابقت مع حـل شـابلي الذي تكلمـنا عنـه فـي الفصل الثالث .

وبشكل عام إذا نظرنا إلى المباريات الثنائية بين شخصين كمباريـات تعاونيـة كانت لدينا النتيجة التالية :

نظرية (4-5)

في أي مباراة تعاونية لشخصين فإن قلب المباراة يتكون من كافة التقسيمات الممكنة وأن هذه الأخيرة هي مجموعة الاستقرار الوحيدة .

ولإثبات صحة النظرية الأخيرة لنفرض أن $\vartheta(\{1\}) = a$ و $\vartheta(\{2\}) = b$ و $\vartheta(\{1,2\}) = c$ عندئذٍ تكون $I(\vartheta)$ من الشكل

$$I(\vartheta\} = \{(x_1,x_2) = (\alpha, c-\alpha) ; a \le \alpha \le c-b\}$$

وبموجب (4.12) و (4.13) فإن $(x_1 , x_2) \ni C(\vartheta)$. إذا كان $x_1 \ge a$ و $x_2 \ge b$ و $x_1 + x_2 = c$ ولذا فإن $C(\vartheta) = I(\vartheta)$ وكذلك لدينا بشكل عام $C(\vartheta) \subseteq S(\vartheta) \subseteq I(\vartheta)$ وينتج عن ذلك أن $C(\vartheta) = S(\vartheta) = I(\vartheta)$ وهو ما نريد إثباته .

ولتوضيح ذلك نعود إلى المثال (11ـ4) فنجد أن

$$I(\vartheta) = \left\{(x_1, x_2) = (\alpha, 5-\alpha) ; \frac{3}{2} \le \alpha \le 4\right\} = S(\vartheta) = C(\vartheta)$$

وكخلاصة لما سبق وقدمناه في هذا الفصل فقد عرفنا بدايته مفهوم نقطة التوازن للمباريات المتعددة الأطراف وأوضحنا أنه من الصعب اعتماده كمفهوم لحل هذه المباريات ثم قدمناه بعدها أربعة مفاهيم لحل المباريات التعاونية المتعددة الأطراف هي مفاهيم القلب والمجموعات المستقرة والنواة ودالة قيم شابلي . وكل من هذه المفاهيم يستند إلى مجموعة من التقسيمات المميزة التي تلعب دوراً أشبه بدور نقاط التوازن للمباريات غير التعاونية فالقلب يتكون من مجموعة من التقسيمات تتميز بعدم إمكانية الهيمنة عليها وتتميز التقسيمات في أي مجموعة مستقرة لمباراة تعاونية بأنها تهيمن على كافة التقسيمات التي تقع خارجها وتتميز التقسيمات في نواة مباراة تعاونية بأنها متكونة من تقسيمة وحيدة من شأنها أن تجعل قناعة أي ائتلاف بما حصل عليه أفضل ما يمكن . أما المفهوم الأخير فيتمثل فيما يمكن أن يتوقعه كل طرف في مباراة تعاونية قبل بدءها والتي أمكن التعبير عنها بدوال قيم شابلي . وقد قدمنا أمثلة توضيحية لجميع هذه المفاهيم .

تمارين (4-1)

1 ــ لدينا مباراة تعاونية بين 3 أشخاص دالتها المميزة معطاة كما يلي :

S	:	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$\vartheta(S)$	:	4	0	0	5	7	6	10

المطلوب :

(أ) أوجد كلاً من $C(\vartheta)$ و $N(\vartheta)$.

(ب) وضح أن المجموعة $\{(4, 6-\alpha, \alpha) ; 0 \le \alpha \le 6\}$ هي مجموعة مستقرة .

(ج) أوجد دوال قيم شابلي .

2 ــ في مباراة تعاونية بين 3 أشخاص دالتها المميزة معطاة كما يلي :

S	:	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$\vartheta(S)$	:	0	0	0	a	b	c	1

المطلوب :

(أ) أوجد دوال قيم شابلي .

(ب) أوجد $C(\vartheta)$.

(ج) وضح أن نواة هذه المباراة $N(\vartheta)$ معطاة كما يلي :

$$N(\vartheta)=\left\{\frac{1}{3}(a+b-2c+1),\frac{1}{3}(a+c-2b+1),\frac{1}{3}(b+c-2a+1)\right\}$$

3 ــ ثلاثة لاعبين A, B, C لكل منهم استراتيجيتين هي :

$A \leftarrow A_1 , A_2$ ، $B \leftarrow B_1 , B_2$ ، $C \leftarrow C_1 , C_2$

يلعبون لعبة ذات مجموع صفري تعطي مصفوفة عوائدها كما يلي :

إذا اختار C الاستراتيجية C_1

	B_1	B_2
A_1	(6, 3, -9)	(-3, -6, 9)
A_2	(9, -6, -3)	(0, -3, +3)

إذا اختار C الاستراتيجية C_2

	B_1	B_2
A_1	(-3, 3, 0)	(0, 6, -6)
A_2	(6, 0, -6)	(-3, 3, 0)

والمطلوب :

(أ) أوجد كافة الائتلافات والائتلافات المضادة ، ثم أوجد مصفوفة العوائد الخاصة بكل ائتلاف .

(ب) أوجد الدالة المميزة ϑ (.) .

(ج) هل المباراة أساسية ؟ غير أساسية ؟ .

(د) أوجد كل من $I(\vartheta)$ ، $C(\vartheta)$ ، $N(\vartheta)$ ، $S(\vartheta)$ لهذه المباراة . ماذا تلاحظ .

4 ـ أعد إجابة المطلوب في (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) بالنسبة للاعبين A ، B ، C في التمرين السابق بحيث أن A يملك ثلاث استراتيجيات هي A_1, A_2, A_3 بينما يملك B استراتيجيتين B_1 , B_2 ويملك C استراتيجيتين C_1 , C_2 وأن مصفوفة العوائد معطاة كما يلي :

إذا اختار C الاستراتيجية C_1

	B_1	B_2
A_1	(1, 1, 0)	(4, -2, 2)
A_2	(1, 2, -1)	(3, 1, -1)
A_3	(-1, 0, 1)	(-2, 1, 1)

إذا اختار C الاستراتيجية C_2

	B_1	B_2
A_1	(-3, 1, 2)	(0, 1, 1)
A_2	(2, 0, -1)	(2, 1, -1)
A_3	(0, -1, 3)	(-3, 2, 1)

5 ــ بالعودة إلى مثال (4ــ4) الخاص بالتصويت في مجلس الأمن ، فمنذ عام 1978 يتكون المجلس من 15 عضو منهم 5 دائمين يملكون حق النقض (الفيتو) ، ولكي يتم تمرير أي قرار فلابد من موافقة 9 من الأعضاء منهم الـ 5 الدائمين . لنفترض أن الخمسة الدائمين هم الأعضاء 1, 2, 3, 4, 5 وأن $\vartheta(S) = 1$ إذا كان الائتلاف S قادراً على تمرير القرار وأن $\vartheta(S) = 0$ عدا ذلك فالمطلوب :

(أ) إيجاد الدالة المميزة . هل هذه الدالة متناظرة ؟

(ب) إيجاد كل من $C(\vartheta)$ و $N(\vartheta)$.

(ج) حساب دوال قيم شابلي . ماذا تلاحظ .

(د) إيجاد جميع المجموعات المستقرة .

6 ــ ثلاث بلدان 1, 2, 3 يمتلك البلد 1 البترول ويستخدمه لتسيير حركة النقل بفائدة قدرها a $ لكل برميل نفط ويرغب البلدة 2 بشراء البترول من البلد 1 لاستخدامه في أغراض الصناعة بفائدة قدرها b $ لكل برميل نفط بينما يرغب البلد الثالث بشراء البترول من البلد 1 لاستخدامه في صناعة الأطعمة وقد قدر فائدته من كل برميل نفط بـ c $. وإذا افترضنا أن $a < b \leq c$ فالمطلوب :

(أ) أوجد الدالة المميزة . هل هذه الدالة متناظرة ؟

(ب) أوجد كلاً من $C(\vartheta)$ ، $N(\vartheta)$.

(ج) جميع المجموعات المستقرة .

(د) دوال قيم شابلي .

(هـ) تطبيق $a = \$ 25$ ، $b = \$ 30$ ، $c = \$ 50$ أعد الحسابات في (أ) إلى (د) باستخدام هذه البيانات .

7 ــ تتكون لجنة من n من الأشخاص . تقوم اللجنة بالتصويت على القرارات بطريقة الأغلبية بحيث أن عائد أي ائتلاف يستطيع تمرير أي قرار 1 أو صفر فيما عدا ذلك . إذا إفترضنا أن اللاعب رقم 1 هو رئيس اللجنة وأن هناك طريقتين في التصويت هما :

(i) يمكن للرئيس ألا يقوم بالتصويت ما لم يكن هناك تعادل في الأصوات ، وسيكون صوته عندئذٍ هو المرجح للقرار .

(ii) يمكن للرئيس أن يصوت كبقية الأعضاء ، وإذا حصل تعادل فالقرار يكون في صالح الفئة التي تضم الرئيس . فالمطلوب :

(أ) إيجاد الدالة المميزة في كل من الطريقتين (i) و (ii) بالنسبة للحالتين n فردي و n زوجي . ماذا تلاحظ ؟

(ب) إيجاد دوال قيم شابلي في الحالتين n فردي و n زوجي وفي كلا الطريقتين (i) و (ii) .

(جـ) أعد المطلوب (ب) إذا علمت أن اللجنة مكونة من الأعضاء 1, 2, 3, 4, 5 .

(د) هل هذه المباراة أساسية ؟ غير أساسية ؟ وضح .

8 ــ مباراة أساسية مكونة من 3 أشخاص تعطي دالتها المميزة كما يلي :

$$\vartheta(\phi) = \vartheta(\{1\}) = \vartheta(\{2\}) = \vartheta(\{3\}) = 0$$

$$\vartheta(\{1,2\}) = \vartheta(\{1,3\}) = \vartheta(\{2,3\}) = \alpha \ , \ \vartheta = (\{1,2,3\}) = 1$$

حيث $0 \le \alpha \le 1$ والمطلوب :

(أ) وضح أن هذه المباراة تصبح ذات مجموع ثابت عندما $\alpha = 1$ وما هو قلب المباراة عندئذٍ .

(ب) كيف تصبح المبارة عندما $\alpha = 0$ ؟ مم يتكون القلب ومجموعة التقسيمات والمجموعات المستقرة عندئذٍ ؟

(جـ) لنفرض أن $0 < \alpha < 1$ بيّن عندئذٍ أن المجموعة

$$S = \{(x, x, 1-2x), (x, 1-2x, x), (1-2x, x, x); \frac{1}{2}\alpha \le x \le \frac{1}{2}\}$$

هي مجموعة مستقرة .

تطبيقات متنوعة

(5 – 1) مقدمة

تناولنا في الفصول الأربع السابقة عدة أنواع من المباريات وتعرضنا للطرق التي تم اقتراحها لحلها . وإضافة إلى التطبيقات المتنوعة التي أوردناها في الفصول السابقة فإننا سنستعرض في هذا الفصل عدداً من المسائل المتنوعة الأخرى نظهر من خلالها كيفية تطبيق هذه الطرق في دراسة وتحليل وتقديم حلول بعض مشاكل الواقع والتي تتضمن النزاع بين طـــرفين أو أكـــثر بغرض الحصول على أكـــبر قدر ممكن من المكاسب . وسنركز بشكل رئيسي على نوعين من التطبيقات هما التطبيقات العسكرية والتطبيقات الاقتصادية .

(5 – 2) بعض التطبيقات العسكرية

تعتبر نظرية المباريات من أهم نظريات وأساليب بحوث العمليات التي يمكن استخدامها في القوات المسلحة كأداة للتدريب على إدارة الصراع في مسارح العمليات صغيرة كانت أم كبيرة . ولقد بات من المؤكد أن على من يمارسون القيادة طرح جميع الاحتمالات التي يمكن أن يلجأ إليها الطرف المعادي في حالتي الهجوم والدفاع وبالتالي عليهم أن يقوموا بتجهيز قواتهم لأكثر الأفعال أو ردود الأفعال التي يمكن أن يلجأ إليها الطرف الخصم بالرغم من أن التنبؤ بسلوك الطرف الخصم هو من العمليات المعقدة التي تستلزم المعرفة شبه الكاملة بهذا الخصم كمعرفة سلوكياته السابقة في المواقف المماثلة والتعرف على جميع إمكاناته البشرية والمادية والعسكرية إضافة إلى التعرف على طبيعة مسرح العمليات والتي تقود جميعها إلى ترجيح احتمالات الأفعال التي يمكن أن تصدر عن الطرف أو الأطراف المعادية . ويتطلب هذا الأمر قادة أكفاء في التفكير الاستراتيجي يقومون بالنظر إلى المواقف بشكل كامل ومترابط وليس على شكل صور مجزأة أو متفرقة قد تقود إلى نتائج غير دقيقة ومما يساعد على ذلك هو الاستدلال بما حدث في الماضي والاستقراء لما يمكن أن يحدث في المستقبل .

ولقد استخدم الجنرال الإنجليزي مونتجمري هذه المباديء أثناء الحرب العالمية الثانية لدى مواجهة القائد الألماني رومل في حرب الصحراء الغربية الواقعة بين مصر وليبيا حيث قام مونتجمري بدراسة كافة العمليات والاحتمالات الممكنة كما درس شخصية رومل وطريقة تفكيره وأسلوبه القيادي ووصل إلى نتيجة مفادها (عدم ترك زمام المبادرة لرومل وأن عليه أن يترك رومل في حيرة من أمره) وكانت الغلبة للبريطانيين في موقعة العلمين المعروفة .

ومن أفضل ما يخدم القادة وهيئات الأركان للنجاح في قيادة قواتهم أثناء الحرب هو ممارستها في أوقات السلم فيما يطلق عليه اسم لعب الحـــــرب (War Games) . فلعبة الحرب ليست إلا عملية محاكاة أو تشبيه (Simulation) للأنشطة العسكرية التي يمكن أن تحدث في المستقبل أثناء الحروب فيتم التدريب عليها وعلى كيفية التعامل والتفاعل معها قبل وقوعها أثناء السلم . حيث يتمكن القادة وهيئات أركانهم من اختبار مخططاتهم العملياتية اللوجستيه ضد خصم تتشابه قدراته وتنظيماته العسكرية بما يتوقع أن يكون عليه العدو الحقيقي في حالة الحرب وهي بذلك تساعد القادة وهيئات أركانهم على ممارسة التدريب على اتخاذ القرارات في ظروف يصعب بل يستحيل أحياناً أن تقع في زمن السلم . وتساعد لعب الحرب جميع المصممين والمحللين والمشاركين فيها إلى ربط المعلومات المتفرقة بطريقة منسقة تساعد على تطبيق الخطط والأفكار والتقنيات الجديدة . ورغم أهمية النتائج الحسابية في تشبيه الأحداث إلا أنها لا تعدو أن تكون أكثر من مؤشرات للنتائج . وكذلك وبالرغم من أن لعب الحرب تساعد في تقديم تمارين نموذجية للواقع وتختبر القدرة على إصدار القرارات وتنفيذها إلا أنها مازالت مجرد أداة بل هي مرآة غير كاملة للواقع ولكنها تعكس هذا الواقع بطريقة أفضل في عملية اتخاذ اللاعبين للقرار . نشير أخيراً إلى أن انتقادات اللاعبين في نهاية اللعبة تشكل عنصراً هاماً في تحليل وتقويم اللعبة . ويبقى السؤال كيف يمكن لنظرية المباريات أن تسهم في هذا المجال الحيوي ؟ . وللجواب نقول إن هذه النظرية تلعب

دوراً رئيسياً في تقويم نتائج لعب الحرب المشار إليها من خلال تقويم الاستراتيجيات المختلفة لكافة الأطراف والتي يمكن أن تتم عن طريق عمليات محاكاة للعب الحرب هذه تمكننا من إيجاد مصفوفات المباريات المطلوبة . وفيما يلي نسـوق بعض الأمثلة العسـكرية التوضيحية لإمكانية استخدام نظرية المباريات في هذا المجال .

مثال (5 ــ 1) المنافسة العسكرية

تقوم قوتان عسكريتان خصمان بمحاولة احتلال موقعين عسكريين موقع (1) وموقع (2) . تتألف القوة الأولى من 3 كتائب مدرعة بينما تتألف القوة الثانية من كتيبتين مدرعتين ، كما أن مستوى العتاد والتدريب متقارب لدى القوتين إذا افترضنا أن كل قوة عسكرية ستكسب أو تخسر شيئاً يتناسب مع الفرق بين عدد الكتائب المهاجمة من طرفها وعدد الكتائب المهاجمة من الطرف الآخر وأن كلاً من القوتين تهدفان إلى جعل الفرق بين مكاسبها العسكرية ومكاسب الطرف الآخر أكبر ما يمكن فالمطلوب :

- تحليل هذه اللعبة .
- إيجاد شجرة المباراة .
- إيجاد جميع الاستراتيجيات الممكنة لكلا القوتين .
- إيجاد مصفوفة المباراة .
- إيجاد الحل الأمثل للمباراة .

الحـــــل

يجب التنويه أولاً أن هذه المباراة هي ذات مجموع صفري للقوتين العسكريتين فلو رمزنا للقوة الأولى بـــ A وللقوة الثانية بـــ B فإن مكاسب A من النقاط هو خسائر لـــ B والعكس بالعكس . إضافة لذلك فإن هناك افتراض ضمني بتساوي أفضلية مهاجمة كل من الموقعين (1) و (2) ولذا فاحتمال مهاجمة الأول يساوي احتمال مهاجمة الثاني ويساوي $\frac{1}{2}$ لكلا القوتين A و B .

ولإيجاد شجرة المباراة والاستراتيجيات لكلا القوتين نلاحظ أن الاستراتيجيات الممكنة للقوة A هي :

A_1 : أن ترسل 3 كتائب للموقع (1) ولا ترسل أي كتيبة للموقع (2) .

A_2 : أن ترسل 2 كتيبة للموقع (1) وترسل كتيبة للموقع (2) .

A_3 : أن ترسل 1 كتيبة للموقع (1) وترسل 2 كتيبة للموقع (2) .

A_4 : ألا ترسل أي كتيبة للموقع (1) وترسل (3) كتائب للموقع (2) .

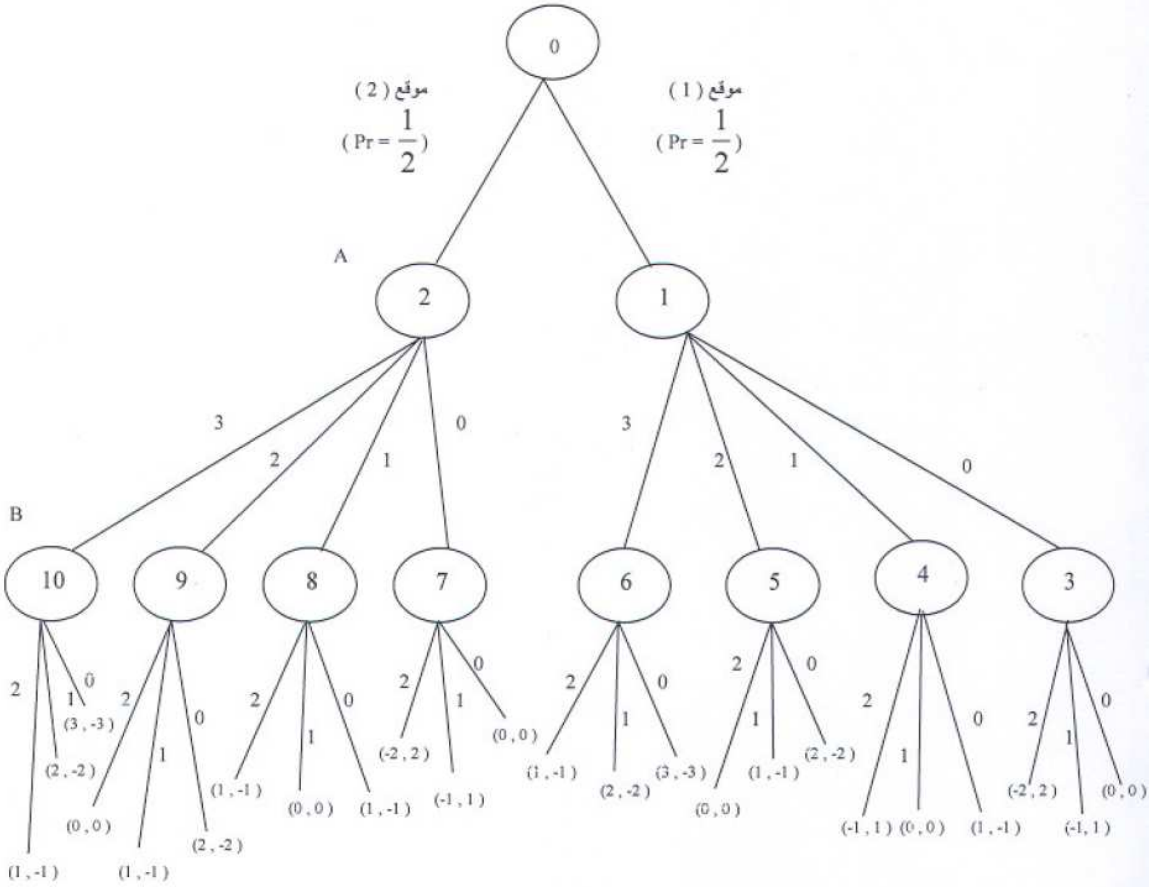
أما استراتيجيات القوة B فهي :

B_1 : أن ترسل 2 كتيبة للموقع (1) ولا ترسل أي كتيبة للموقع (2) .

B_2 : أن ترسل كتيبة للموقع (1) وكتيبة للموقع (2) .

B_3 : ألا ترسل أي كتيبة للموقع (1) وترسل 2 كتيبة للموقع (2) .

وبذلك فإن شجرة المباراة ستكون على النحو المبين بالشكل (5 ــ 1) .



شكل (5 ــ 1) شجرة المباراة لمثال (5 ــ 1)

ولإيجاد مصفوفة المباراة :

لنفترض أن e_{ij} هي القيمة المتوقعة لدى استخدام الاستراتيجية (A_i , B_j) نجد ما يلي :

$$e_{11} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{2} \ , \ e_{12} = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2} \ , \ e_{13} = \frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{2}(-1) = 1$$

$$e_{21} = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times -1 = -\frac{1}{2} \ , \ e_{22} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{2} \ , \ e_{23} = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times -1 = \frac{1}{2}$$

وهكذا فإننا نجد مصفوفة العوائد G التالية :

$$G = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{Max} \end{array} \begin{array}{c} \overline{} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Min} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \end{array}$$

ولهذه المصفوفة عدة نقاط سرجية قيمة كل منها $\frac{1}{2}$. وتقابل هذه النقاط السرجية كـــلاً من الحلول المثلى التالية :

$$(A_4 , B_2) \text{ ، } (A_4 , B_1) \text{ ، } (A_3 , B_2) \text{ ، } (A_3 , B_1) \text{ ، } (A_1 , B_2) \text{ ، } (A_1 , B_1)$$

وجميعها استراتيجيات مثلى . لاحظ أنه قد تم اختيار هذه الاستراتيجيات المثلـــى فـــي تقاطع الأسطر والأعمدة التي يكون فيها :

$$\text{Min} (\text{Max } e_{ij}) = \text{Max} (\text{Min } e_{ij})$$

مثال (5 ــ 2) القتال الجوي

متبارزين A و B يحمل كلاً منهما مسدساً فيه طلقة واحدة وتفصل بينهما مسافة قدرها 4 خطوات . وفي كل خطوة يتقدمها أحد المتبارزين فإن عليه أن يتخذ قراراً بالإطلاق على خصمه أو بعدم الإطلاق كما أن فرص قتل الخصم لأي منهما ستتزايد كلما اقترب أحدهما من الآخر . إذا إفترضنا أن احتمال أن ينجح A بقتل B حسب المسافة الفاصلة معطى كما يلي :

الاحتمال	المسافة الفاصلة
0.2	4 خطوات
0.8	2 خطوة
1	0 خطوة (التحام)

كما أن احتمال أن ينجح B بقتل A حسب المسافة الفاصلة معطى كما يلي :

الاحتمال	المسافة الفاصلة
0.5	4 خطوات
0.75	2 خطوة
1	0 خطوة (التحام)

وإذا إفترضنا أن العوائد المقابلة هي1 إذا بقي حياً A وتمكن من قتل B و1- إذا بقي B حياً وتمكن من قتل A و 0 عدا ذلك فالمطلوب تحليل هذه المباراة وحلها في كل من الحالتين التاليتين :

أ ــ كل من المتبارزين يمكن أن يعلم أن خصمه قد أطلق النار وفشل في الإصابة .

ب ــ كل من الخصمين لا يعلم فيما إذا كان خصمه قد أطلق النار وفشل في الإصابة كما هي الحالة عندما يكون هناك طائرتان حربيتان خصمان في الجو وكل منهما مسلحة بصاروخ جو جو مضاد للطائرات .

الحـــــل :

أ ــ بموجب نص المثال فإن أمام كل من اللاعبين ثلاث استراتيجيات ممكنة هي :

A_1 (B_1) : أن يطلق النار عندما يكون على مسافة 4 خطوات .

A_2 (B_2) : أن يطلق النار عندما يكون على مسافة خطـوتين إذا لـم يكـن خصمه قد أطلق و إلا فإنه سيطلق النار على مسافة الالتحام .

A_3 (B_3) : أن يطلق النار عندما يكون على مسافة الالتحام .

ومن الواضح أن المباراة ذات مجموع صـفري . وعلـى ضـوء التوزيعـات الاحتمالية أعلاه فإن مصفوفة العوائد لهذه المباراة تعطى كما يلي :

$$G_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -0.3 & -0.6 & -0.6 \\ 0 & 0.05 & 0.6 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}$$

فمثلاً القيمة المتوقعة للعائد المقابل للاستراتيجية (A_1 , B_1) (وهو أن يطلق كل منهما النار على مسافة 4 خطوات) فإن العائد المقابل لـ A وهو (0.3-) يحسب كما يلي : إما أن يقوم A بإصابة B أو أن يقوم B بإصابة A والقيمة المتوقعة لذلك هي :

$$1\ (0.2) + (-1)\ (0.5) = -0.3$$

والقيمة المتوقعة للعائد المقابل لـ (A_1 , B_2) تحسب كما يلي :

أن يطلـق A النار على مسافة 4 خطوات فيصيب B أو أن يطلق A النار على مسافة 4 خطوات ولا يصيب B وعندها يؤجل B اطلاقه للنار إلى مسافة الالتحام فيقتـل A والقيمة المتوقعة لـ A عندئذٍ هي :

$$1\ (0.2) + (-1)\ (0.8) = 0.6$$

وهكذا يمكن حساب بقية القيم في المصفوفة G_1 .

إن المصفوفة G_1 هي من النوع 3 × 3 يمكن اختصارها كما يلي : من الواضح أن A_2 تهيمن على كل من A_1 و A_3 فنحصل على المصفوفة [0.6 0.05 0] وفيها B_1 نهيمن على B_2 و B_3 وبذلك نحصل على المباراة المختصرة [0] وهي تقابل الاستراتيجية الخالصة (A_2 , B_1) وقيمتها 0 لكل من الطرفين المتبارزين .

ب ــ في هذه الحالة فإن الاستراتيجية (A_1,B_1) تعني أن A (B) سيطلق النار عن مسافة 4 خطوات دون أن يعرف أن B (A) قد أطلق النار ولن يكون لذلك أثر في القيمة المتوقعة المقابلة أي أنها 0.3- ، أما في الاستراتيجية (A_1,B_2) فالقيمة المتوقعة المقابلة تحسب كما يلي :

أن يطلق A النار على مسافة 4 خطوات فيصيب B أو أن يطلق على مسافة 4 خطوات ولا يصيب B ولكن B في هذه الحالة سيطلق النار على مسافة خطوتين دون أن يعلم هل أطلق خصمه النار أم لا ، وعندها إما أن يصيب A أو لا يصيب A . واستناداً إلى معطيات المثال تكون القيمة المتوقعة المقابلة لـ (A_1,B_2) : 0.4- = [(0.25) 1 + (0.75) (1-)] 0.8 . وفي الاستراتيجية (A_2,B_2) إما أن يطلق A النار على مسافة 2 خطوة ويصيب B أو لا يصيبه وفي هذه الحالة الأخيرة سيطلق B النار على A من مسافة 2 خطوة ، فالقيمة المتوقعة المقابلة عندئذٍ هي : 0.05 = (0.75) (+1) + (0.8) 1 وبإجراء بقية الحسابات بطريقة مماثلة نجد أن مصفوفة العوائد في هذه الحالة هي :

$$G_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.4 & -0.6 \\ -0.1 & 0.05 & 0.6 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

وفيها A_2 تهيمن على A_1 الأمر الذي يمكننا من اختصار G_2 إلى :

$$\begin{bmatrix} -0.1 & 0.05 & 0.6 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

وفيها B_2 تهيمن على B_3 ولذا يمكن اختصار المصفوفة الأخيرة إلى :

$$\begin{bmatrix} -0.1 & 0.05 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

وهي من الشكل 2 × 2 . وليس لهذه المصفوفة نقطة سرجية ويمكننا التحقق أن الحل بالنسبة للطرف A هو الاستراتيجية المختلطة $\left(0,\frac{10}{13},\frac{3}{13}\right)$ لـ $(A_1,\ A_2,\ A_3)$ وقيمته $\upsilon = -\frac{1}{13}$ والحل للطرف B هو $\left(\frac{11}{13},\frac{2}{13},0\right)$ لـ $(B_1,\ B_2,\ B_3)$ وقيمته $-\frac{1}{13}$ لـ B وتجدر الإشارة هنا إلى أن مثل هذه الاستراتيجيات يصعب تطبيقها سواء لـ A وذلك لأن مثل هذه المباراة قد لا يمكن تكرارها أكثر من مرة ولذا فقد يكون من الأنسب لكل من الطرفين A و B أن يختار الاستراتيجية الخالصة التي تملك أكبر احتمال وهو ما تحققه الاستراتيجية (A_2,B_2) .

مثال (5 ــ 3) استراتيجيات الدفاع والهجوم

يتقابل لواءين في موقع استراتيجي على نقطة حدودية بين دولتين متجاورتين حيث يعود أحد اللواءين إلى الدولة A ويعود اللواء الآخر إلى الدولة B . أمام اللواء العائد للدولة A استراتيجيتين مكنتين هما :

A_1 : أن يقوم بمهاجمة اللواء العائد للدولة B .

A_2 : أن يقوم بالدفاع .

كذلك فإن اللواء العائد للدولة B استراتيجيتين ممكنتين هما :

B_1 : أن يقوم بمهاجمة اللواء العائد للدولة A .

B_2 : أن يقوم بالدفاع .

ونتيجة للدراسة والتحليل العسكري فقد تم تقدير عوائد الاستراتيجيات المختلفة على النحو المبين في المصفوفة التالية :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{4}) & (-\frac{2}{3}\ ,\ -\frac{4}{5}) \\ (-\frac{2}{5}\ ,\ -\frac{3}{5}) & (-\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{2}{5}) \end{bmatrix} \end{array}$$

مثلاً في حال استخدام الاستراتيجية (A_1 , B_1) (أي أن كل من اللواءين قام بمهاجمة اللواء الآخر) فإن اللواء العائد للدولة A يخسر $\frac{1}{2}$ قواته بينما يخسر اللـــواء العائـــد للدولة B ، $\frac{3}{4}$ قواته . يرغب قائد كل من اللواءين إيجاد الاستراتيجية المثلى التي تجعل خسائره أقل ما يمكن وخسائر خصمه أكبر ما يمكن . أوجد حلاً لهذه المباراة العسكرية.

لاحظ أن هذه المباراة ذات مجموع غير صفري .

الحـــــل

سوف نقدم حلاً لهذه المباراة بالنظر إليها :

أ ــ كمباراة غير تعاونية .

ب ــ كمباراة تفاوضية .

ج ــ كمباراة تعاونية مكونة من شخصين .

ولكننا ولتسهيل التعامل مع المباراة سوف نقوم بتوحيد المقامات في مـــصفوفة العوائـــد المعطاة أعلاه لنحصل على المباراة المكافئة التالية (المقام المشترك 60) .

$$G = \begin{bmatrix} (-30\ ,\ -45) & \rightarrow & (-40\ ,\ -48) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (-24\ ,\ -36) & \rightarrow & (-36\ ,\ -24) \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ 1-x \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} y & & 1-y \end{matrix}$$

أ ــ إذا اعتبرنا هذه المباراة غير تعاونية فإن النقطة (24- , 36-) المقابلة للاستراتيجية (A_2,B_2) هي نقطة التوازن الوحيدة للمباراة وذلك لأنه لو استبدل A الاستراتيجية A_2 بـ A_1 وبقي B على وضعه فإنه سيحصل على نتيجة أسوء (40-) ولو استبدل B الاستراتيجية B_2 بـ B_1 وبقي A على وضعه فإنه سيحصل كذلك على نتيجة أسوء (36-) . ويمكننا كذلك التحقق من ذلك بطريقة الأسهم أو بطريقة سواستيكا حيث نجد :

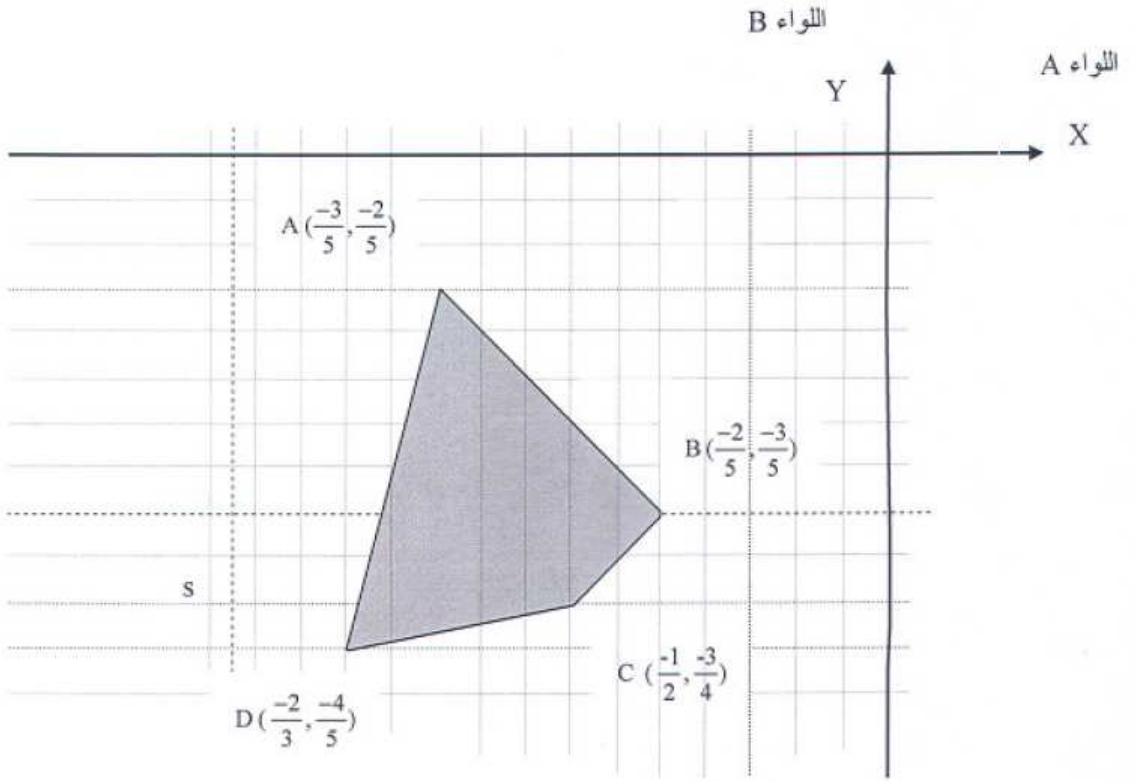
$e_A(x,y) = -2x(y+2) - 12(y+3)$ حيث $0 \le y \le 1$ و y تأخذ قيمة محدودة

$e_B(x,y) = 3y(5x-4) + 24(x-1)$ حيث $0 \le x \le 1$ و x تأخذ قيمة محدودة

وبرسم هاتين الدالتين من أجل $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ نجد أن أكبر قيمة لهما معاً تقع من أجل $x = 0$ و $y = 0$ والتي تعطينا $e_A = -36$ و $e_B = -24$ كذلك فإن النقطة (24- , 36-) هي حل بالمعنى العام للمباراة وذلك لأنه يمكن اختصار G على مرحلتين كما يلي :

إن عوائد A_2 تهيمن على مقابلاتها في A_1 ولذا فإن G تختصر إلى [(24- , 36-) (36- , 24-)] وفي هذه الأخيرة فإن عوائد B_2 تهيمن على مقابلاتها في B_1 ولذا فإنها تختصر إلى [(24- , 36-)] وهي أقل مباراة مختصرة لـ G وتمثل فيها النقطة (24- , 36-) حلاً بالمعنى الدقيق وبالتالي فإن هذه النقطة تمثل حلاً بالمعنى العام للمباراة G (لاحظ أيضاً أن (36- , 24-) ليست نقطة توازن لأنه لو استبدل B الاستراتيجية B_1 بـ B_2 وبقي A على وضعه في A_2 فإن B سيحصل على نتيجة أفضل) . إذاً لو نظرنا إلى هذه المباراة بأنها غير تعاونية فإن كافة التحليلات قادت إلى أن الاستراتيجية (A_2 , B_2) هي المثلى والتي تعني أن كلاً من اللواعين سيختار استراتيجية الدفاع وعندها A يخسر $\frac{3}{5}$ من قواته و B يخسر $\frac{2}{5}$ من قواته .

ب ــ استناداً إلى مصفوفة العوائد فإن مضلع العوائد هــو داخــل ومحــيط المــضلع ABCD الموضح بالشكل (5 ــ 2) .



شكل (5 ــ 2) مضلع العوائد لمثال (5 ــ 3)

ولإيجاد مستويات الأمان علينا حل المباراتين الصفريتين :

$$G_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{5} & \boxed{-\frac{3}{5}} \end{bmatrix}$$

لها نقطة سرجية

وقيمتها

$$\upsilon_A = \frac{-3}{5}$$

$$G'_B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{5} \\ \boxed{-\frac{4}{5}} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

لها نقطة سرجية وقيمتها

$$\upsilon_B = \frac{-4}{5}$$

فنقطة الأمـــان هـــي : $s(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-0.6, -0.8)$ وبالتالي فإن فئة التفـــاوض هـــي القطعة AB .

وكما نلاحظ أن طريقة الأمثلية الكلية لا توصل إلى نتيجة في فئة التفاوض هذه ولذا فإننا سنقوم بحل هذه المباراة العسكرية بطريقة منـــصف الربـــع الأول . ويمكننـــا التحقق بسهولة من أن :

معادلة منصف الربع الأول من s هي $y = x - \frac{1}{5}$

ومعادلة المستقيم المار بالنقطتين A و B هي $y = -x - 1$

وأنهما يتقاطـــعان في النقطـــة (0.6 - , 0.4 -) N وهي أفضـــل من نقطة الأمـــــان (0.8- , 0.6-) S . ويمكننا التحقق أن هذا الحل يتطابق مع حل شابلي الذي تحدثنا عنه

جـ ــ إذا نظرنا إلى هذه المباراة على أنهـا تعاونيـة بـين A و B فـإن مجموعـة الائتلافات الممكنة بين A و B هي : {A,B} , {B} , {A} , ϕ وعند حصول تعاون بين A و B فإنهما سيحقق لهما أكبر مجموع ممكن وهـو 1- وعنـدها تكون الدالة المميزة لهذه المباراة هي :

$$\vartheta(\phi)=0 \quad و \quad \vartheta(\{A\})=\frac{-3}{5} \quad و \quad \vartheta(\{B\})=\frac{-4}{5} \quad و \quad \vartheta(\{A,B\})=-1$$

لنحسب الآن دوال قيم شابلي لكل من A و B فنجدها :

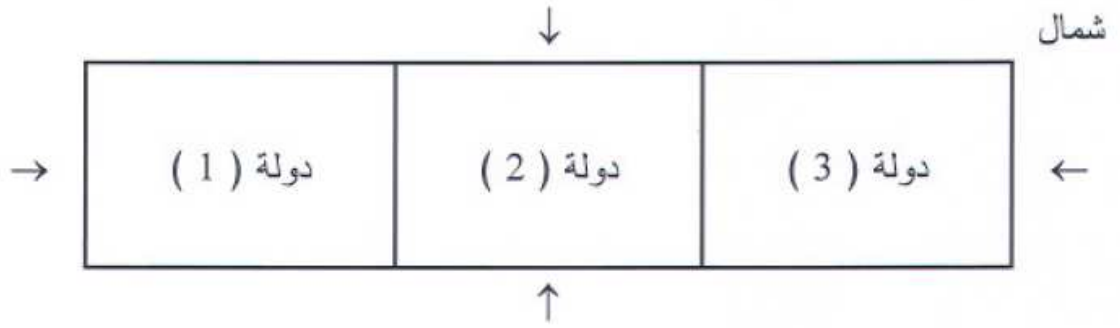
$$h_A(\vartheta)=\frac{(1-1)!(2-1)!}{2!}(-\frac{3}{5}-0)+\frac{(2-1)!(2-2)!}{2!}(-1+\frac{3}{5})=0.5$$

$$h_B(\vartheta)=\frac{(1-1)!(2-1)!}{2!}(-\frac{4}{5}-0)+\frac{(2-1)!(2-2)!}{2!}(-1+\frac{4}{5})=0.5$$

والذي يعني أنه وقبل بداية المعركة فإن كلاً من اللواءين A و B سـيتوقع أن يخـسر نصف قواته مهما كانت الاستراتيجية التي سينتهجها . وبمقارنة النتائج التي تم التوصل إليها في الحالات (أ) ، (ب) ، (جـ) أعلاه نلاحظ أن الحل في الحالة (أ) هـو في صالح B أكثر مما هو في صالح A في حين أن الحل في الحالة (ب) هـو فـي صالح A أكثر مما هو في صالح (B) . وبالنظر إلى مستويات أمـان A و B يمكـن القول بأنه ما لم يلجأ A إلى استراتيجية تهديدية مثل A_1 فإن A قد يلجأ إلى الحل الذي تم التوصل إليه في الحالة أ مع أنه في صالح خصمه أكثر مما هو في صالحه وهذا أمر طبيعي إذ أنه وبشكل عام لا تعاون بين طرفين متحاربين .

مثال (5 ــ 4) اتفاقيات الدفاع المشترك

تتقاسم كثير من الدول المتجاورة أعباء الدفاع عن دولها من خلال تكوين تحالفات دفاعية فيما بينها لتحميها من أي أخطار يمكن أن تهددها من دول مجاورة كما هي الحال مثلاً بين أمريكا وكندا . ومن شأن مثل هذه التحالفات أن توفر من تكاليف الدفاع . لنفترض أن لدينا ثلاث دول متجاورة كما في الشكل (5 ــ 3) التالي :



شكل (5 ــ 3)

وأن الأسهم تشير إلى احتمال وجود أخطار من دولة مجاورة فإذا افترضنا أنه لأي تحالف S فإن قيمة الدالة المميزة $\vartheta(S)$ تساوي تكلفة الدفاع عن هذا التحالف وأن هذه التكلفة تتناسب مع طول الحدود التي يتم الدفاع عنها فالمطلوب دراسة وتحليل هذه المشكلة وذلك بالنظر إليها كمباراة بين ثلاث لاعبين {1,2,3} وذلك في الحالتين التاليتين :

(أ) توجد وحدة مسافة (100 كم مثلاً) بين أي بلدين متجاورين .

(ب) المسافات بين الدول المتجاورة معطاة كما في الجدول التالي :

	من الشمال	من الغرب	من الجنوب	من الشرق	المجموع
الدولة (1)	2 وحدة	3 وحدة	3 وحدة	2 وحدة	10
الدولة (2)	1 وحدة	2 وحدة	2 وحدة	3 وحدة	8
الدولة (3)	3 وحدة	3 وحدة	1 وحدة	2 وحدة	9

الحـــــل

(أ) استناداً إلى وضع الدول في الشكل (5 ــ 3) وتعريف قيمة ϑ (S) للتحالف S فإن: $\vartheta(\{1\}) = -4$. ومرد ذلك هو أنه الدولة ستقوم بالدفاع عن جميع حدودها دون الدخول في تحالـف مع أي دولـة مجـاورة من الدولتين 3 ، 2 . ولنفس الأسباب نجد ما يلي : $\vartheta(\{2\}) = -4$ و $\vartheta(\{3\}) = -4$, $\vartheta(\{1,2\}) = -6$

$$\vartheta(\{1,3\}) = -8 \text{ ، } \vartheta(\{2,3\}) = -6 \text{ ، } \vartheta(\{1,2,3\}) = -8$$

ولتسهيل التعامل مع المسألة يمكننا إجـراء التحويـل التـالي علـى الدالـة المميـزة $\vartheta(\{i'\}) = \vartheta(\{i\}) + 4$ حيث $i' = 1,2,3$ عندئذٍ تصـبح الدالة المميزة كما فـي الجـدول التالي :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
ϑ (S)	0	0	0	2	0	2	4

وكما رأينا في الفصل السابق فإن قلب مباراة يتكون من التقسيمات التي تتميـز بعـدم إمكانية الهيمنة عليها . ولـذا فـإننا سـنوجد قلـب المباراة بالاعتمـاد على العلامتين (4.12) و (4.13) الواردتين في نظرية (4 ــ 2) من الفصل السابق وخلاصتهما هنا أن القلب C (ϑ) يتكون من جميع التقسيمات $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ التي تحقق ما يلي :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \vartheta(\{1,2,3\}) = 4 \quad (1)$$

$$\{1,2,3\} \supset S \text{ لأي } \sum_{i \in s} x_i \geq \vartheta(s) \text{ و}$$

ومن المتراجحة الأخيرة نجد العلاقات التالية :

$$x_1 \geq 0 \quad (3) \text{ , } x_2 \geq 0 \quad (4) \text{ , } x_3 \geq 0 \quad (5) \text{ , } x_1 + x_2 \geq 2 \quad (2)$$

$$x_1 + x_3 \geq 0 \quad (6) \text{ , } x_2 + x_3 \geq 2 \quad (7)$$

فقلـــب هـــذه المباراة هو مجموعة جميع التقسيمات التي تحقق العلاقات من (1) إلى (7) . وتقود هذه العلاقات إلى مزيد من الخصائص للتقسيمات في قلب هذه المبـــاراة كالآتي :

(1) مع (5) تقود إلى $4 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + x_3$ ومنها $0 \leq x_3 \leq 2$ (8)

(1) مع (6) تقود إلى $4 = x_1 + x_3 + x_2 \geq 0 + x_2$ ومنها $0 \leq x_2 \leq 4$ (9)

(1) مع (7) تقود إلى $4 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 + x_1$ ومنها $0 \leq x_1 \leq 2$ (10)

ومن الواضح ضرورة استبعاد التقسيمة (4, 0, 0) للدولة (1) والتقـــسيمة (0, 4, 0) للدولة (2) والتقسيمة (4, 0, 0) للدولة (3) لأنه لن يكون عندئـــذٍ أي فائـــدة مـــن التحالفـــات مع أن التقسيمة (0, 4, 0) تحقـــق العلاقـــات من (1) إلى (7) . كذلك لا يمكن أن تقوم أي من دولتين متحالفتين بإعفاء حليفتها من تبعات هذا التحالف. فمثلاً، التقسيمات من الشكل (0, x, y) غير ممكنة للتحالف {1,2} حيـــث $x > 0$ و $y > 0$ ولكنها ممكنة للتحالف {2,3} وكذلك علينا استبعاد التقسيمات التي لا تحقق العلاقـــات من (1) إلى (7) أعلاه . ولو اعتبرنا أن قيم x_i هي قيم صحيحة أي لو اعتبرنـــا أن مشاركة أي دولة تكون بوحدات دفاعية صحيحة (غير كسرية) فإن قلب هذه المبـــاراة عندئذٍ هو :

$$C(\vartheta) = \{(2-\alpha\ ,\ 3-\alpha)\ ;\ \alpha = 0, 1, 2\} \qquad (11)$$

فمن أجل $\alpha = 0$ نجد أن التقسيمة (2, 3, 2) وهي مرفوضة لأنها لا تحقـــق الـــشروط أعلاه . ومن أجل $\alpha = 2$ نجد التقسيمة (0, 3, 0) وهي كذلك مرفوضة . أما من أجـــل $\alpha = 1$ فنجد التقسيمة (1, 2, 1) وبذلك فإن $C(\vartheta) = \{(1,2,1)\}$ وهذه التقسيمة تهيمن على كافة التقسيمات الأخرى حسب الخواص التي تتمتع بها التقسيمات التي تكوّن قلـــب أي مباراة . وتعني هذه النتيجة أن على الدولة (2) أن تتحمل أعبـــاء دفاعيـــة تقـــدر

بوحدتين بينما تتحمل كل من الدولة (1) والدولة (3) أعباء دفاعيـــة تقـــدر بوحـــدة واحدة لكل منهما . وتبدو هذه النتيجة منطقية إذ أن الدولة (2) تملك حدوداً مع كل من الدولتين (1) و(3) . ومع ذلك فـــإن الدولة (2) توفر على نفسها أعبـــاءً قـــدرها وحدتين وهو نفس ما توفره كل من الدولتين (1) و(3) . وفي هـــذا الصدد يمكننـــا ملاحظة أنه سواءً أخذت x_i قيماً صحيحة أو قيماً حقيقية فإن نواة هذه المباراة تتكـــون من النقطة (1, 2, 1) لأن $N(\vartheta) \subseteq C(\vartheta)$ ولأن $N(\vartheta)$ تتكون من نقطة واحدة كمـــا نعلم (نذكر بأن النواة إذا لم تكن خالية فإنها تتكون من نقطة واحدة) . ومن المعلوم أن الحل الذي تم التوصل إليه سيجعل قناعة أي من الدول الثلاث أفضل ما يمكـــن حـــسب تعريف وخصائص نواة مباراة .

(ب) استناداً إلى تعريف $\vartheta(S)$ الوارد في نص المثال وإلى المعطيات الـــواردة فـــي الجدول أعلاه للحالة (ب) نجد ما يلي :

$$\vartheta(\{3\}) = -9 \ , \ \vartheta(\{2\}) = -8 \ , \ \vartheta(\{1\}) = -10$$
$$\vartheta(\{2,3\}) = -14 \ , \ \vartheta(\{1,3\}) = -19 \ , \ \vartheta(\{1,2\}) = -15 \ , \ \vartheta(\{1,2,3\}) = -22$$

ولتسهيل التعامل مع المسألة وكما في الحالة (أ) سنقوم بإجراء التحويل التـــالي علـــى الدالة المميزة $\vartheta(\{i'\}) = \vartheta(\{i\}) + 10$ عندئذٍ الدالة المميزة تعطى بما يلي :

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$\vartheta(S)$	0	2	1	5	1	6	8

وقلب هذه المباراة يتكون من جميع التقسيمات $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ التي تحقق العلاقتين (4.12) و (4.13) وهي هنا كما يلي :

$$x_1 + x_2 + x_3 = \vartheta(\{1,2,3\}) = 8 \qquad (12)$$
$$\text{و } \sum_{i \in s} x_i \geq \vartheta(s) \text{ لأي } S \subset \{1,2,3\}$$

ومن المتراجحة الأخيرة تقود إلى العلاقات التالية :

$$x_1 + x_2 \geq 5 \quad (16)\,,\; x_3 \geq 1 \quad (15)\,,\; x_2 \geq 2 \quad (14)\,,\; x_1 \geq 0 \quad (13)$$
$$x_2 + x_3 \geq 6 \quad (18)\,,\; x_1 + x_3 \geq 1 \quad (17)$$

فقلب المباراة في الحالة (ب) هو مجموعة جميع التقسيمات التي تحقق العلاقات من (12) إلى (18) أعلاه . وكما في الحالة (أ) يمكننا استنتاج مزيد من الخصائص للتقسيمات $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ المنتمية لقلب هذه المباراة كما يلي :

فمن (12) و(16) نجد $8 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 5 + x_3$ ومنها نجد $1 \leq x_3 \leq 3$ (19)

ومن (12) و(17) نجد $8 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 + x_2$ ومنها نجد $2 \leq x_2 \leq 7$ (20)

ومن (12) و(18) نجد $8 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 + x_1$ ومنها نجد $0 \leq x_1 \leq 2$ (21)

وكما في الحالة (أ) يمكننا كذلك استبعاد الكثير من التقسيمات التي لا تعود على التحالفات المقابلة بأي فوائد (ما هي هذه التقسيمات ؟) . ولو اعتبرنا أن x_i تأخذ قيماً صحيحة فإن العلاقات (19) و (20) و (21) تعني عندئذٍ أن $x_1 \in \{1,2,3\}$ و $x_2 \in \{2,3,4,5,6,7\}$ و $x_3 \in \{1,2,3\}$. ومع ذلك علينا استبعاد بعض قيم x_i مثل القيمة 0 لـ x_1 لأنها تقود إلى $\vartheta(\{1\}) = -10$ والذي يعني أن الدولة (1) لن تستفيد من التحالف ولنفس السبب علينا استبعاد القيمة 1 لـ x_3 . وكذلك علينا استبعاد القيمتين 6 ، 7 لـ x_2 . وبذلك فإن $x_1 \in \{1,2\}$ و $x_2 \in \{2,3,4,5\}$ و $x_3 \in \{1,2,3\}$ ومنها نجد أن :

$$C(\vartheta) = \{(1,5,2)\,,\,(1,4,3)\,,\,(2,5,1)\,,\,(2,4,2)\,,\,(2,3,3)\}$$

(ولو أبقينا على اعتبارنا أن x_i تأخذ قيماً حقيقية فإن $C(\vartheta)$ يتكون من جميع التقسيمات $\overline{X}$ التي تحقق جميع العلاقات (12) إلى (21) أعلاه وعددها غير معدود وغير منته كما هو ملاحظ) .

أما نواة المباراة في هذه الحالة فتتكون من التقسيمة الوحيدة $\overline{X}$ من $C(\vartheta)$ التي تجعل $L(\overline{X}) = \vartheta(S) - \overline{X}(S)$ أقل ما يمكن ونوجد ذلك كما يلي :

(i) من أجل الائتلافات المكونة من عضو واحد وهي {1} ، {2} ، {3} نجد ما يلي :

من أجل الائتلاف المكون من {1} نجد $L(\overline{X}) = 0 - 1 = -1$ إذا كان $x_1=1$ ، $L(\overline{X}) = 0 - 2 = -2$ إذا كان $x_1=2$ ومن أجل الائتلاف المكون من {2} نجد أن $L(\overline{X}) = 2 - 6 = -4$ إذا كان $x_2=6$ و $L(\overline{X}) = -3$ إذا كان $x_2=5$ و $L(\overline{X}) = 2 - 4 = -2$ إذا كان $x_2=4$ و $L(\overline{X}) = 2 - 3 = -1$ إذا كان $x_2=3$. ومن أجل الائتلاف المكون من {3} نجد أن $L(\overline{X}) = 1 - 1 = 0$ إذا كان $x_3=1$ و $L(\overline{X}) = -1$ إذا كان $x_3=2$ و $L(\overline{X}) = -2$ إذا كان $x_3=3$.

(ii) من أجل الائتلافات المكونة من عضوين وهي {1,2} ، {1,3} ، {2.3} نجد ما يلي :

من أجل الائتلاف المكون من {1,2} نجد $L(\overline{X}) = 5 - 7 = -2$ من أجل النقطة (2,5,1) و $L(\overline{X}) = 5 - 6 = -1$ من أجل (1,5,2) ، (2,4,2) و $L(\overline{X}) = 5 - 5 = 0$ من أجل (1,4,3) ، (2,3,3) .

من أجل الائتلاف المكون من {1,3} نجد أن $L(\overline{X}) = 1 - 3 = -2$ من أجل النقطة (1,5,2) ، (2,5,1) و $L(\overline{X}) = 1 - 4 = -3$ من أجل (1,4,3) ، (2,4,2) و $L(\overline{X}) = 1 - 5 = -4$ من أجل (2,3,3) .

من أجل الائتلاف المكون من {2,3} نجد أن $L(\overline{X}) = 6 - 7 = -1$ من أجل النقطة (1,5,2) والنقطة (1,4,3) و $L(\overline{X}) = 6 - 6 = 0$ من أجل (2,5,1)، (2,4,2) ، (2,3,3) .

(iii) للائتلاف المكون من 3 أعضاء وهو {1,2,3} فنجد من أجل كافة عناصر $C(\vartheta)$ أن : $L(\overline{X}) = 8 - 8 = 0$.

(iv) للائتلاف الخالي ϕ نجد $L(\overline{X}) = 0 - 0 = 0$. ولما كانت أقل قيمة لـ $L(\overline{X})$ من بين القيم التي أوجدناها أعلاه هي $L(\overline{X}) = -4$ تقع عند النقطة (2,3,3) لذا فإن نواة المباراة تتكـون من هذه النقطة الوحيدة سواءً أخذت x_i قيماً صـحيحة أو حقيقية . وبموجب التحويل الخطي $\vartheta(\{i'\}) = \vartheta(\{i\}) + 10$ فإن هذه النقطـة تقابل (-8,-7,-7) ولذا فإن $N(\vartheta) = \{(-8,-7,-7)\}$. وكما نعلم فإن الـسياسة الوحيدة التي يتم التوصل إليها من خلال نواة المباراة هي سياسة توصل جميـع الأطراف إلى أفضل قناعة لكل منهم وتعني النتيجة (-8,-7,-7) أن كـل مـن الدولتين (1) و (3) ستستفيد بوحدتين دفاعيتين بينما تـستفيد الدولـة (2) بوحـدة دفاعية واحـدة . ويمكن تبرير هذه النتيجة المنطقية بملاحظة أن الدولة (2) تملك حدوداً مشتركة مع كل من الـدولتين (1) و (3) الأمـر الـذي يستوجب منها تحمل أعباءً دفاعية أكبر من جارتيها .

(5 – 3) بعض التطبيقات الاقتصادية

من المعروف أن جميع المنشآت (كـشركات الإنتـاج والمعامـل والمـصانع والمؤسسات والدوائر المالية ... الخ) تتنافس فيما بينها لكسب أكبـر الحـصص فـي الأسـواق المحلية و/أو العالمية وبالتالي لكسب أكبر الأربـاح مـن هـذه الأسـواق . وبالنظر إلى هذه المنشآت على أنها أطراف في نزاع أو نزاعات ، ونظراً لأن كل مـن هذه الأطـراف استراتيجياته الخاصة به والتي تعـود عليه بعوائد معينة يمكن حسابها أو تقديرها فإن نظرية المباريات قد أصبحت من الأدوات الفعالة في صـنع القـرارات المثلى لكل من المنشآت المعنية بمثل هذا النوع من التنافس أو النزاع .

وفيما يلي نسوق بعض الأمثلة التي تتناول تطبيقات نظرية المباريات في دراسة وتحليل وتقديم الحلول لبعض المشاكل الاقتصادية التي يمكن أن تنشأ في الواقع العملي .

مثال (5 ــ 5) ضرورة استخدام المعدات التكنولوجية الحديثة

يزخر العصر الحالي بالكثير من المبتكرات التي تقود إلى إنتاج العديد من المعدات أو الأجهزة التكنولوجية الحديثة والتي يمكن استخدامها لتحسين أو تطوير عمل المنشآت المتنوعة في كافة مجالات الحياة . ولدى إنتاج معدة أو جهاز حديث يمكن أن يساعد في تحسين أو تطوير عمل منشأة ما فإنه غالباً ما تقوم هذه المنشأة بشرائه واستخدامه في عملية تحسين أو تطوير أعمالها . والسؤال الآن : " هل على أي منشأة أن تشتري المعدات و/أو الأجهزة التي يمكن أن تؤدي إلى تحسين وتطوير عمل هذه المنشأة ؟ " . وللإجابة دعنا نأخذ منشأتين A و B ومعدة أو جهاز معين حديث D يمكن أن يساعد في تطوير وتحسين أداء المنشأة التي تقوم باقتنائه وهنا يمكن أن نميز حالتين :

أ ــ إذا قامت كلا المنشأتين باقتنائه أو عدم اقتنائه فإن ذلك لن يعود على أي منهما بأي شيء (العائد = 0) وإذا قامت أحدهما باقتنائه فسيعود عليها بالعائد C وستخسر الأخرى C- حيث $C > 0$.

ب ــ إذا قامت A (B) باقتناء D فإن عوائدهما هي a (b) وإذا قامت A (ولم تقم B) باقتناء D فإن عوائدهما هي a (e) وإذا قامت B (ولم تقم A) باقتناء D فإن عوائدهما هي b (d) وإذا لم تقم أي منهما باقتنائه فإن عوائدهما هي (d,e) حيث $a > d > 0$ و $b > e > 0$. فإذا نظرنا إلى هذه المسألة على أنها مباراة بين المنشأتين A و B فعندئذٍ يكون لكل منهما إستراتيجيتين خالصتين هما : A_1 (B_1) وذلك عندما تقوم A (B) باقتناء D و A_2 (B_2) عندما لا تقوم A (B) باقتناء D .

الحالة (أ) : من الواضح أن المباراة في هذه الحالة ذات مجموع صفري تعطي مصفوفتها G_0 بما يلي :

$$G_0 = \begin{array}{c|cc|c} & B_1 & B_2 & \text{Min} \\ A_1 & \boxed{o} & c & o \\ A_2 & -c & 0 & -c \\ \text{Max} & o & c & \end{array}$$

وهذه المصفوفة من الشكل 2 × 2 وحلها هو الاستراتيجية الخالصة (A_1, B_1) وقيمتها 0 لكل من المنشأتين . وتعني هذه النتيجة أن على كل من المنشأتين اقتناء المعدة الجديدة D حتى ولو لم يؤد ذلك إلى تحسين عوائدها النسبية . وتبدو هذه النتيجة منطقية إذ أن الخيار الآخر (وهو أن تقوم إحدى المنشأتين فقط باقتناء المعدة الجديدة) سيؤدي إلى ربح لإحدى المنشأتين فقط الأمر الذي لا ترغبه المنشأة الأخرى بشكل عام .

فعلى سبيل المثال إذا قام أحد المستشفيات بشراء جهاز حديث للتنظير فإن على أي مستشفى منافس أن يقوم بشراء نفس الجهاز لكي يتمكن من الاحتفاظ بزبائنه (وبالتالي بعوائده) .

الحالة (ب) : المباراة في هذه الحالة ذات مجموع غير صفري تعطي مصفوفتها بما يلي :

$$G = \begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ A_1 & (a,b) \leftarrow & (a,e) \\ & \uparrow & \uparrow \\ A_2 & (d,b) \leftarrow & (d,e) \end{array}$$

ومن الواضح أن النقطة (a,b) والمقابلة للاستراتيجية الخالصة (A_1, B_1) هي نقطة التوازن الوحيدة لهذه المباراة ذلك أنه لو بقيت A (B) على اختيارها لـ A_1 (B_1) بينما قامت B (A) إلى اختيار B_2 (A_2) فإن العوائد المقابلة ستنقص إلى e (d) كذلك يمكن الاستنتاج أن (a,b) هي نقطة توازن للمباراة بطريقة الأسهم . فالحل الأمثل لمثل هذه المباراة هو الاستراتيجية الخالصة (A_1, B_1) والتي تعني أن على كل من المنشأتين A و B شراء المعدة الجديدة D .

لاحظ أنه يمكن تعميم هذا المثال على العديد من المنشآت . فمثلاً لو كان لدينا ثلاث منشآت A,B,C فعندئذٍ سيكون لدى كل منها استراتيجيتين مختلفتين الأولى هي اقتناء المعدة D والثانية هي عدم اقتناء هذه المعدة . فلو تناولنا الحالة المقابلة للحالة (أ) لمنشأتين فيمكننا مثلاً أن نتصور مصفوفة العوائد التالية :

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (0,0,0)^{(*_1)} & \leftarrow & (\frac{c}{2},-c,\frac{c}{2}) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (-c,\frac{c}{2},\frac{c}{2}) & \leftarrow & (-\frac{c}{2},-\frac{c}{2},c) \end{bmatrix} \end{array}$$

إذا قامت المنشأة C باقتناء المعدة D (يقابل اختيار C لـ C_1) .

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (\frac{c}{2},\frac{c}{2},-c)^{(*_2)} & \leftarrow & (c,-\frac{c}{2},-\frac{c}{2}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (-\frac{c}{2},c,-\frac{c}{2}) & \leftarrow & (0,0,0) \end{bmatrix} \end{array}$$

إذا لم تقوم المنشأة C باقتناء المعدة D (يقابل اختيار C لـ C_2) .

(تدل الأسهم الطولية على اتجاه تزايد عوائد A وتدل الأسهم العرضية على اتجاه تزايد عوائد B وتدل نقاط تلاقي الأسهم وهي ($*_1$) و ($*_2$) على نقاط توازن محتملة ولما كانت عوائد C تزداد من ($*_2$) إلى ($*_1$) فإن ($*_1$) هي نقطة التوازن الوحيدة للمباراة) . فالعائد (0,0,0) يقابل الاستراتيجية (A_1, B_1, C_1) وهي أن تقوم المنشآت الثلاث باقتناء D و (A_3,B_3,C_3) وهي ألا تقوم أي من المنشآت الثلاث باقتناء D . والعائد $(\frac{c}{2},-c,\frac{c}{2})$ مثلاً يقابل الاستراتيجية (A_1,B_2,C_1) وهي أن تقوم كل من المنشأتين A و C باقتناء D ويعود ذلك على كل منهما بـ $\frac{c}{2}$ لكن المنشأة B لا تقوم باقتناء D وتخسر في ذلك c – . وهكذا تعطي مفاهيم مماثلة لبقية العوائد بحيث أن مصفوفة العوائد تمثل مباراة ذات مجموع صفري لثلاث أطراف . ويمكننا التحقق بسهولة أن النقطة (0,0,0) المقابلة للاستراتيجية (A_1,B_1,C_1) هي نقطة التوازن الوحيدة لهذه المباراة [نذّكر بالملاحظة (3 ــ 1)] والتي تعني أنه من الضروري أن تقوم كل من المنشآت الثلاث باقتناء المعدة الجديدة D . ولو قمنا بتعميم هذه الحالة (الحالة أ) على N منشأة ($N \geq 2$) فإننا سنحصل على نتائج مماثلة . وتبدو هذه النتيجة منطقية إذ لا يمكن لأي منشأة أن تتخلى عن سباق اقتناء المعدات التكنولوجية الحديثة . أما دراسة الحالة $N \geq 3$ والمقابلة للحالة (ب) فتعتمد بشكل عام على مصفوفة العوائد الناتجة من مثل هذه المباراة . فمثلاً لو فرضنا أن مصفوفة العوائد كانت كما يلي (العوائد معطاة بمئات آلاف الدولارات) .

	B_1		B_2	
A_1	$(5,5,5)^{(*_1)}$	←	(5,3,5	إذا تبنت C الاستراتيجية C_1 وهي اقتناء D
	↑		↑	
A_2	(2,5,5)	←	(2,3,5)	

	B_1		B_2	
A_1	$(5,5,4)^{(*_2)}$	←	(5,3,4)	إذا تبنت C الاستراتيجية
	↑		↑	C_2 وهي عدم اقتناء D
A_2	(2,5,4)	←	(2,3,4)	

فمثلاً العائد (5,3,5) المقابل للاستراتيجية (A_1,B_2,C_1) تعني أنه إذا قررت كل من A و C اقتناء المعدة D وقررت B عدم اقتنائها فإن عوائد A ترتفع إلى 500000 $ بينما تبقى عوائد B 300000 $. وللمصفوفة أعلاه نقطة توازن وحدية هي (5,5,5) والتي تعني أن على كل من المنشآت C,B,A اقتناء المعدة التكنولوجية الحديثة D لأن ذلك سيرفع من عوائد كل منها .

مثال (5 ــ 6) مسألة التنافس في الأسعار

من المعروف أن الشركات أو المؤسسات أو المصانع أو الممولين الذين يقومون بتزويد الأسواق بما تحتاجه من المنتجات (أو السلع) تتنافس فيما بينها في عروض الأسعار المقدمة لهذه السواق وذلك في حال عدم وجود أي احتكار . فكما هو معروف فإن أسعار سلعة معينة في سوق ما يعتمد على الكميات المتوافرة من هذه السلعة في تلك السوق . كذلك ، في حال وجود عروض أسعار متنوعة لنفس السلعة فإن المشترين سيختارون أقل عروض للأسعار المتوافرة . وبذلك فإن الكمية التي ستقوم شركة ما بطرحها في السوق من سلعة ما تعتمد بشكل رئيس على السعر الذي تعرضه هذه الشركة للسلعة وعلى الأسعار المنافسة المقدمة من شركات أخرى . وكمثال على ذلك فإن عدد الركاب الذي تكسبه شركة طيران معينة إلى جهة محدودة يعتمد على أسعار التذاكر الذي تقدمه كل من هذه الشركة والشركات الأخرى المنافسة ويعتمد كذلك على العدد الكلي للركاب الراغبين بالسفر إلى تلك الجهة . وللإيضاح سنقدم مثالاً لشركتين سنرمز لهما بـ B و A تتنافسان على طرح سلعة معينة في السوق سنرمز لها بالرمز m ولنفرض مثلاً أن العلاقة بين سعر السوق p للوحدة من السلعة m والكمية

المعروضة ــ ولتكن Q ــ من هذه السلعة معطاة بالعلاقة التالية :

$$p = 200 - Q (\Leftrightarrow Q = 200 - p) \quad \text{إذا كانت } Q \le 200$$

و $p = 0$ خلاف ذلك . حيث $Q = 200$ هي أقصى كمية يمكن أن يطلبها السوق من السلعة m . لنفرض كذلك أن الكميات التي تطرحها A و B في السوق من m هي x_1 و x_2 بسعر p_1 و p_2 للوحدة على الترتيب عندئذٍ يكون :

$$x_1 = \begin{cases} 200 - p_1 & \text{عندما } p_1 < p_2 \\ \dfrac{200 - p_1}{2} & \text{عندما } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وبالمثل :

$$x_2 = \begin{cases} 200 - p_2 & \text{عندما } p_2 < p_1 \\ \dfrac{200 - p_2}{2} & \text{عندما } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ولو فرضنا أن سعر تكلفة الوحدة لكل من A و B هي 20 $ ، عندئذٍ تكون عوائد A و B ولتكن a و b معتمدة على p_1 , P_2 و x_1 , x_2 ومعطاة كما يلي :

$$a = (p_1 - 20)\, x_1 \quad , \quad b = (p_2 - 20)\, x_2$$

لنتصور الآن أن كلاً من A و B يمكن أن تطرح السلعة m بأحد الأسعار 70 $ و 50 $ و 20 $ للوحدة عندئذٍ تكون مصفوفة العوائد معطاة كما في المصفوفة أدناه :

حيث A_1 (B_1) هي الاستراتيجية التي تقابل طرح السلعة بسعر 20 $ للوحدة

A_2 (B_2) هي الاستراتيجية التي تقابل طرح السلعة بسعر 50 $ للوحدة

A_3 (B_3) هي الاستراتيجية التي تقابل طرح السلعة بسعر 70 $ للوحدة

فمثلاً من أجل (A_1 , B_1) نجد $a = (20-20)\, x_1 = (20-20)\, x_2 = b = 0$

	$20 B_1		$50 B_2		$70 B_3
$20 A_1	(0,0)	↔	(0,0)	↔	(0,0)
	↕		↓		↓
$50 A_2	(0,0)	→	(2250, 2250)	←	(4500 , 0)
	↕		↑		↑
$70 A_3	(0,0)	→	(0 , 4500)	←	(3750 , 3750)

من أجل (A_1 , B_2) نجد :

$$a = (20-20)\, x_1 = 0 \quad , \quad b = (50-20)\, x_2 = 30 \times 0 = 0$$

من أجل (A_2 , B_2) نجد :

$$a = (50-20)\, 75 = 30 \times 75 = 2250 = b$$

من أجل (A_2 , B_3) نجد :

$$a = (50-20)\, (150) = 4500 \quad \text{و} \quad b = 0$$

من أجل (A_3 , B_3) نجد :

$$a = b = (70-20)\, (75) = 50\, (75) = 3750$$

وبالنظر إلى هذه المباراة كمباراة غير تعاونية (كما هي الحال في مثل هذه الحالات) فإنه لابد لنا من إيجاد نقاط التوازن كحلول محتملة للمباراة . وبموجب الأسهم المبينة على مصفوفة المباراة نستنتج أن كلا النقطتين (0,0) و (2250 , 2250) المقابلة لـ (A_1 , B_1) و (A_2 , B_2) هي نقطة توازن ولما كانت الثانية تهيمن على الأولى فحل هذه المباراة هو النقطة (2250 , 2250) المقابلة للاستراتيجية (A_2 , B_2) وهي أن تعرض كلاً من A و B السلعة m بسعر 50 $ للوحدة فتحقق كلاً منهما ربحاً قدره

2250 $. لاحظ أن الاستراتيجية (A_2 , B_2) تعني أن الشركتين تتقاسمان السوق مناصفة . ومع أن الاستراتيجية (A_3 , B_3) تعطي كذلك حصصاً متساوية للشركتين بعوائد أكبر لكل منهما إلا أنها ليست نقطة توازن وهي بالتالي ليست حلاً محتملاً للمباراة .

مثال (5 ــ 7) مسألة التنافس بين الباعة والمشترين

لنفرض أن لدينا مجموعة من الباعة B ومجموعة من المشترين A لسلعة معينة C تباع وتشترى بالوحدات مثل السيارات والبيوت والأدوات الكهربائية والألبسة وغيرها من هذا النوع من السلع التي لا يمكن تداولها بأجزاء الوحدة . ومن أجل تسهيل الدراسة نلاحظ أنه يمكننا افتراض أن :

عدد الباعة (عدد العناصر B) = عدد المشترين (عدد عناصر A) = n

وهذا الافتراض ممكن دوماً ذلك أنه لو كان مثلاً عدد الباعة = 2 وعدد المشترين = 3 فيمكن إضافة بائع وهمي ثالث بحيث يتحقق ما نريد .

لنفرض الآن أن عدد الباعة والمشترين والذي يساوي 2n موزع بحيث أن المشترين يأخذون أرقاماً فردية أي $A = \{1,3,\ldots,2n-1\}$ وأن الباعة يأخذون أرقاماً زوجية أي $B=\{2,4,\ldots,2n\}$ فإذا فرضنا أن p هو سعر الوحدة في السوق وأن هذا السعر يتغير من بائع لآخر . فإذا تم بيع وحدة من السلعة C من قبل بائع $i \ni B$ بسعر b_i حيث $b_i \geq p$ فإنه يحقق منفعة قدرها b_i-p .

وإذا قام مشتري $j \ni A$ بشراء وحدة من C بسعر a_j حيث $a_j \leq p$ فإن هذا المشتري يحقق منفعة قدرها $p-a_j$. بالنظر إلى هذه المسألة كمباراة تعاونية بين مجموعة المشترين A ومجموعة الباعة B فالسؤال الآن :

كيف يجب أن تتم التحالفات بين عناصر هاتين المجموعتين لكي تحصل مثل هذه التحالفات على أكبر عائد ممكن ؟

وبعبارة أخرى :
ما هي القيمة (أو القيم) المثلى للمتغير p التي تجعل عائد مثل هذه التحالفات أكبر ما يمكن ؟

سنجيب على هذا السؤال من خلال إيجاد الدالة المميزة لمجموعتين من الباعة والمشترين تتكون كل منها من ثلاثة عناصر وذلك من خلال دراسة وتحليل ما أسميناه " قلب المباراة " . لنلاحظ أولاً أنه يمكن إعادة ترتيب عناصر كل من المجموعتين A و B بحيث أن الأرقام الأولى تعطى لأكثر المستفيدين أي أن :

$$b_1 \geq b_3 \geq \ldots\ldots \geq b_{2n-1} \geq 0$$
$$0 \leq a_2 \leq a_4 \leq \ldots. \leq a_{2n}$$

وبموجب هذه البيئة الطبيعية لحالات البيع والشراء فإن الدالة المميزة $\vartheta(S)$ تعطى كما يلي :

إذا كانت $S \supseteq A$ أو كانت $S \supseteq B$ فإن $\vartheta(S) = 0$

إذا شكل البائع i والمشتري j تحالفاً (ائتلافاً) $\{i , j\}$ فإن عائدها يساوي :

$$(b_i - p) + (p - a_j) = b_j - a_j$$

إذا كان $b_i > a_j$ فإن $\vartheta(\{i , j\}) = b_i - a_j > 0$

إذا كان $b_i \leq a_j$ فإن $\vartheta(\{i , j\}) = 0$

وتعني هذه النتيجة أنه لن يكون هناك تحالفاً بين أي بائع وأي مشتري ما لم يحقق لهما منفعة فعلية قدرها $0 < (b_i - a_j)$.

الآن لنفرض أن $B = \{1,3,5\}$ و $A = \{2,4,6\}$ ، ولنفرض أن ترقيم العناصر في كل من A و B قد تم بحيث أن :

$$0 \le a_2 \le a_4 \le a_6 \quad \text{و} \quad b_1 \ge b_3 \ge b_5 \ge 0$$

لنأخذ مثلاً :

$$a_2 = \$\,8 \quad \text{و} \quad a_4 = \$\,12 \quad \text{و} \quad a_6 = \$\,16$$
$$b_1 = \$\,15 \quad \text{و} \quad b_3 = \$\,10 \quad \text{و} \quad b_5 = S\,5$$

عندئذٍ يكون :

$$\vartheta(\{1,2\}) = 15 - 8 = 7\ ,\ \vartheta(\{1,4\}) = 3\ ,\ \vartheta(\{2,3\}) = 2\ ,$$
$$\vartheta(\{3,4\}) = \vartheta(\{1,6\}) = \vartheta(\{2,5\}) = \vartheta(\{4,5\}) = \vartheta(\{5,6\}) = 0$$

أما التحالفات الثلاثية مثل $\{1,2,3\}$ ، $\{1,4,3\}$ والتي تضم بائعين ومشتري واحد فتحسب قيمة $\vartheta(S)$ عندها يأخذ أفضل العوائد الناتجة من بيع أحد هذين البائعين لذلك المشتري فمثلاً لحساب $\vartheta(\{1,2,3\})$ نجد أنه إذا باع 1 لـ 2 فإن $\vartheta(\{1,2\}) = 7$ ، أما إذا باع 3 لـ 2 فإن $\vartheta(\{2,3\}) = 2$ وبالتالي فإن $\vartheta(\{1,2,3\}) = 7$. كذلك لو أردنا حساب $\{1,4,3\}$ نجد أن $\vartheta(\{1,4\}) = 3$ و $\vartheta(\{3,4\}) = 0$ وبالتالي $\vartheta(\{1,4,3\}) = 3$. وهكذا نحسب قيمة $\vartheta(S)$ عند كل التحالفات الثلاثية . ولو طبقنا نفس الطريقة على التحالفات الرباعية مثل $\{1,2,3,4\}$ والتي فيها اثنين من الباعة واثنين من المشترين نجد أن $\vartheta(\{1,2,3,4\}) = 7$ وذلك لأن أفضل العوائد تنتج عن التحالف $\{1,2\}$ الموجود ضمن التحالف $\{1,2,3,4\}$ وتطبق نفس الطريقة للتحالفات الخماسية حيث نجد مثلاً $\vartheta(\{1,2,3,4,5\}) = 7$ وهكذا ، وكذلك نجد $\vartheta(\{1,2,3,4,5,6\}) = 7$.

إيجاد قلب المباراة :

إن قلب هذه المباراة هو مجموعة جميع التقسيمات :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \overline{X}$$

التي تحقق العلاقتين (4.12) و (4.13) أي :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 7 \quad \text{و} \quad \sum_{k \in S} x_k \geq \vartheta(S)$$

لكن نلاحظ $x_5 = x_6 = 0$ ذلك أن تحالف البائع $i = 5$ أو المشتري $j = 6$ مع أي مجموعة أخرى من البائعين و/أو المشترين لن يفيد تلك المجموعة بشيء ولذا يمكننا القول بأن قلب المباراة هو مجموعة التقسيمات $\overline{X}$ التي تحقق ما يلي :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad (1)$$

$$x_1 + x_4 \geq 2 \quad (4) \quad \text{و} \quad x_2 + x_3 \geq 3 \quad (3) \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 \geq 7 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 7 \quad (5) \quad \text{و} \quad x_1 + x_2 + x_4 \geq 7 \quad (6) \quad \text{و} \quad x_1 + x_3 + x_4 \geq 3 \quad (7)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \quad (8)$$

فمن (1) ، (2) ، (3) ، (4) نجد أن $x_3 = x_4 = 0$ وبدمج هذه النتيجة مع (1) ، (2) نجد أن $x_1 + x_2 = 7$ ثم من (8) نجد أن $x_2 \geq 2$ ثم من (7) نجد أن $x_1 \geq 3$ وبذلك فإن قلب هذه المباراة يعطى بـ

$$C(\vartheta) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 = \alpha, x_2 = 7-\alpha, x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, 3 \leq \alpha \leq 5\}$$

فقلب هذه المباراة يتكون من جميع نقاط القطعة الواصلة بين النقطتين (3,4,0,0,0,0) و (4,3,0,0,0,0) . وعندما تأخذ x_i قيماً صحيحة فإن :

$$C(\vartheta) = \{(3,4,0,0,0,0), (4,3,0,0,0,0), (5,2,0,0,0,0)\}$$

وكما نلاحظ فإن اللاعبين 1 و 2 هما اللاعبان الرابحان في أي تحالف . وفي الحالتين فإن عناصر $C(\vartheta)$ تهيمن على ما سواها من التقسيمات في المجموعة $I(\vartheta)$.

إيجاد نواة المباراة :

بحسب تعريفها فإن نواة المباراة $N\ (\vartheta)$ تتكون من تقسيمة واحدة $\overline{X}$ وهي تلك التقسيمة من $C(\vartheta)$ [نذكّر بأن $N(\vartheta) \subseteq C(\vartheta)$ التي تجعل $L(\overline{X}) = \vartheta(S) - \overline{X}(S)$ من أجل جميع الائتلافات (أو التحالفات) أقل ما يمكن . ونظراً لأن $N(\vartheta)$ مكونة من نقطة واحدة ونظراً لأن النقطة (4,3,0,0,0,0) هي منتصف النقطتين الأخيرتين فإن $N(\vartheta)$ تتكون من هذه النقطة أي $N(\vartheta) = \{(4,3,0,0,0,0)\}$ وهذه النقطة توافق $x_1 = 15 - p^* = 4$ ومنها $p^* = 11$ و $x_2 = p^* - 8 = 3$ ومنها $p^* = 11$ فالسعر الأمثل لأي تحالف يضم 1 و 2 هو $p^* = 11$. وهذا السعر يحقق أكبر عائد ممكن (هو 7) والذي يساوي الفرق بين أكبر قيمة لـ b_i ($b_1 = \$\ 15$) وأصغر قيمة لـ a_i ($a_2 = \$\ 8$) . وهي نتيجة منطقية تماماً كما نلاحظ .

نهاية الإقتباس من كتاب: أساسيات نظرية المباريات تأليف د. زيد تميم البلخي

مباريات الشكل الطبيعي Normal Form بواسطة Sage:

سوف نستعرض حل مباريات الشكل الطبيعي او الشكل الإستراتيجي Strategic Form التي درسناها سابقا بواسطة Sage

مثال:

سوف نحل المباراة المعطاة بمصفوفة المدفوعات التالية

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & B \\ 1 & 2 \end{array} \\ A \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,2 & 1,1 \\ 0,0 & 2,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

or

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
sage: A = matrix([[3, 1], [0, 2]])
sage: B = matrix([[2, 1], [0, 3]])
sage: b_of_s = NormalFormGame([A, B])
sage: b_of_s
sage: b_of_s.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(0, 1), (0, 1)],[(3/4, 1/4),(1/4, 3/4)],[(1, 0), (1, 0)]]
```

لأي زوج من الإستراتيجيات المختلطة (s_1, s_2) المدفوع للاعب A هو

$s_1 \; A \; s_2$

و المدفوع للاعب B هو

$s_1 \; B \; s_2$

```
sage: for ne in
b_of_s.obtain_nash(algorithm='enumeration'):
....:       print "Utility for {}: ".format(ne)
....:       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1]),
                          vector(ne[0]) * B * vector(ne[1])
Utility for [(0, 1), (0, 1)]:
```

```
2 3
Utility for [(3/4, 1/4), (1/4, 3/4)]:
3/2 3/2
Utility for [(1, 0), (1, 0)]:
3 2
```

تمرين: اوجد الحل السابق بإستخدام Gambit.

مثال:

$$A \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} B \\ 1 \quad\quad 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{pmatrix}$$

or

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
sage: A = matrix([[1, -1], [-1, 1]])
sage: B = matrix([[-1, 1], [1, -1]])
sage: m_p = NormalFormGame([A, B])
sage: m_p.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]]

sage: [vector([1/2, 1/2]) * M * vector([1/2, 1/2])
....:                 for M in m_p.payoff_matrices()]
[0, 0]

sage: m_p.payoff_matrices()
(
[ 1 -1] [-1 1]
[-1 1], [ 1 -1])
```

مباريات المجموع الصفري:

مثال:

```
sage: A = matrix([[0, -1, 1, 1, -1],
....:             [1, 0, -1, -1, 1],
....:             [-1, 1, 0, 1 , -1],
```

```
....:             [-1, 1, -1, 0, 1],
....:             [1, -1, 1, -1, 0]])
sage: g = NormalFormGame([A])
sage: g.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5), (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)]]
sage: g.payoff_matrices()
```

أمثلة:

```
sage: A = matrix([[10, 500, 44],
....:                [15, 10, 105],
....:                [19, 204, 55],
....:                [20, 200, 590]])
sage: B = matrix([[2, 1, 2],
....:             [0, 5, 6],
....:             [3, 4, 1],
....:             [4, 1, 20]])
sage: g=NormalFormGame([A, B])
sage: g.obtain_nash(algorithm='lrs') # optional - lrslib
[[(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1)]]
sage: g.obtain_nash(algorithm='lrs', maximization=False) #
optional - lrslib
[[(2/3, 1/12, 1/4, 0), (6333/8045, 247/8045, 293/1609)],
[(3/4, 0, 1/4, 0), (0, 11/307, 296/

sage: A = matrix([[3,3],
....:                [2,5],
....:                [0,6]])
sage: B = matrix([[3,2],
....:                [2,6],
```

```
....:                 [3,1]])
sage: g = NormalFormGame([A, B])
sage: g.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(0, 1/3, 2/3), (1/3, 2/3)], [(4/5, 1/5, 0), (2/3,
1/3)], [(1, 0, 0), (1, 0)]]


sage: A = matrix([[160, 205, 44],
....:                 [175, 180, 45],
....:                 [201, 204, 50],
....:                 [120, 207, 49]])
sage: B = matrix([[2, 2, 2],
....:                 [1, 0, 0],
....:                 [3, 4, 1],
....:                 [4, 1, 2]])
sage: g=NormalFormGame([A, B])
sage: g.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(0, 0, 3/4, 1/4), (1/28, 27/28, 0)]]
sage: g.obtain_nash(algorithm='lrs') # optional -
lrslib
[[(0, 0, 3/4, 1/4), (1/28, 27/28, 0)]]
sage: g.obtain_nash(algorithm='LCP') # optional -
gambit
[[(0.0, 0.0, 0.75, 0.25), (0.0357142857, 0.9642857143,
0.0)]]

sage: player1 = matrix([[2, 8, -1, 1, 0],
```

```
....:                         [1, 1, 2, 1, 80],
....:                         [0, 2, 15, 0, -12],
....:                         [-2, -2, 1, -20, -1],
....:                         [1, -2, -1, -2, 1]])
sage: player2 = matrix([[0, 8, 4, 2, -1],
....:                         [6, 14, -5, 1, 0],
....:                         [0, -2, -1, 8, -1],
....:                         [1, -1, 3, -3, 2],
....:                         [8, -4, 1, 1, -17]])
sage: fivegame = NormalFormGame([player1, player2])
sage: fivegame.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)]]
sage: fivegame.obtain_nash(algorithm='lrs') #
optional - lrslib
[[(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0)]]
sage: fivegame.obtain_nash(algorithm='LCP') #
optional - gambit
[[(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0), (0.0, 1.0, 0.0, 0.0,
0.0)]]
```

Here is an example of a 3 by 2 game with 3 Nash equilibrium:

```
sage: A = matrix([[3,3],
....:                 [2,5],
....:                 [0,6]])
sage: B = matrix([[3,2],
....:             [2,6],
....:             [3,1]])
```

```
sage: g = NormalFormGame([A, B])
sage: g.obtain_nash(algorithm='enumeration')
[[(0, 1/3, 2/3), (1/3, 2/3)], [(4/5, 1/5, 0), (2/3, 1/3)],
[(1, 0, 0), (1, 0)]]
```

```
sage: p1 = matrix([[1, 2], [3, 4]])
sage: p2 = matrix([[3, 3], [1, 4]])
sage: g = NormalFormGame([p1, p2])
sage: g.payoff_matrices()
(
[1 2] [3 3]
[3 4], [1 4]
)
```

بعض المباريات المبنية داخل Sage:

وهي بعض النماذج الأولية و التي يوجد تطبيقات عديدة عليها.

1)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.PrisonersDilemma()
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (0, 1)]]
sage: d = {(0, 0): [-2, -2], (0, 1): [-5, 0], (1,
0): [0, -5], (1, 1): [-4, -4]}
sage: g == d
True
```

2)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.AntiCoordinationGame()
sage: g
Anti coordination game - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d ={(0, 1): [1, 5], (1, 0): [5, 1],
....: (0, 0): [3, 3], (1, 1): [0, 0]}
sage: g == d
True

sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (1, 0)], [(1/3, 2/3), (1/3, 2/3)], [(1,
0), (0, 1)]]
```

3)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.BattleOfTheSexes()
sage: g
Battle of the sexes - Coordination game -
Normal Form Game with the following utilities: ...
sage: d = {(0, 1): [1, 1], (1, 0): [0, 0], (0, 0):
[3, 2], (1, 1): [2, 3]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (0, 1)], [(3/4, 1/4), (1/4, 3/4)], [(1,
0), (1, 0)]]
```

4)

```
sage: g = game_theory.normal_form_games.Chicken()
sage: g
Chicken - Anti coordination game -
Normal Form Game with the following utilities: ...
sage: d = {(0, 1): [-1, 1], (1, 0): [1, -1],
....: (0, 0): [0, 0], (1, 1): [-10, -10]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (1, 0)], [(9/10, 1/10), (9/10, 1/10)],
[(1, 0), (0, 1)]]
```

5)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.CoordinationGame()
sage: g
Coordination game - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d = {(0, 1): [0, 0], (1, 0): [0, 0],
....: (0, 0): [10, 5], (1, 1): [5, 10]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (0, 1)], [(2/3, 1/3), (1/3, 2/3)], [(1,
0), (1, 0)]]
```

6)

```
sage: g = game_theory.normal_form_games.HawkDove()
sage: g
Hawk-Dove - Anti coordination game -
Normal Form Game with the following utilities: ...
sage: d ={(0, 1): [2, 0], (1, 0): [0, 2],
....: (0, 0): [-2, -2], (1, 1): [1, 1]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (1, 0)], [(1/3, 2/3), (1/3, 2/3)], [(1,
0), (0, 1)]]
```

7)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.MatchingPennies()
sage: g
Matching pennies - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d ={(0, 1): [-1, 1], (1, 0): [-1, 1],
....: (0, 0): [1, -1], (1, 1): [1, -1]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]]
```

8)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.PrisonersDilemma()
sage: g
Prisoners dilemma - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d = {(0, 0): [-2, -2], (0, 1): [-5, 0], (1, 0): [0, -5],
....: (1, 1): [-4, -4]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (0, 1)]]
```

9)

```
sage: g = game_theory.normal_form_games.RPS()
sage: g
Rock-Paper-Scissors - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d = {(0, 1): [-1, 1], (1, 2): [-1, 1], (0, 0): [0, 0],
....: (2, 1): [1, -1], (1, 1): [0, 0], (2, 0): [-1, 1],
....: (2, 2): [0, 0], (1, 0): [1, -1], (0, 2): [1, -1]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)]]
```

10)

```
sage: g = game_theory.normal_form_games.RPSLS()
sage: g
Rock-Paper-Scissors-Lizard-Spock -
Normal Form Game with the following utilities: ...
sage: d = {(1, 3): [-1, 1], (3, 0): [-1, 1], (2, 1): [1, -1],
....: (0, 3): [1, -1], (4, 0): [1, -1], (1, 2): [-1, 1],
....: (3, 3): [0, 0], (4, 4): [0, 0], (2, 2): [0, 0],
....: (4, 1): [-1, 1], (1, 1): [0, 0], (3, 2): [-1, 1],
....: (0, 0): [0, 0], (0, 4): [-1, 1], (1, 4): [1, -1],
....: (2, 3): [1, -1], (4, 2): [1, -1], (1, 0): [1, -1],
....: (0, 1): [-1, 1], (3, 1): [1, -1], (2, 4): [-1, 1],
....: (2, 0): [-1, 1], (4, 3): [-1, 1], (3, 4): [1, -1],
....: (0, 2): [1, -1]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5), (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)]]
```

11)

```
sage: g = game_theory.normal_form_games.StagHunt()
sage: g
Stag hunt - Coordination game -
Normal Form Game with the following utilities: ...
sage: d = {(0, 1): [0, 4], (1, 0): [4, 0],
....: (0, 0): [5, 5], (1, 1): [2, 2]}
sage: g == d
True
```

```
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 1), (0, 1)], [(2/3, 1/3), (2/3, 1/3)], [(1, 0), (1, 0)]]
```

12)

```
sage: g =
game_theory.normal_form_games.TravellersDilemma()
sage: g
Travellers dilemma - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d = {(7, 3): [5, 1], (4, 7): [1, 5], (1, 3): [5, 9],
....: (4, 8): [0, 4], (3, 0): [9, 5], (2, 8): [0, 4],
....: (8, 0): [4, 0], (7, 8): [0, 4], (5, 4): [7, 3],
....: (0, 7): [1, 5], (5, 6): [2, 6], (2, 6): [2, 6],
....: (1, 6): [2, 6], (5, 1): [7, 3], (3, 7): [1, 5],
....: (0, 3): [5, 9], (8, 5): [4, 0], (2, 5): [3, 7],
....: (5, 8): [0, 4], (4, 0): [8, 4], (1, 2): [6, 10],
....: (7, 4): [5, 1], (6, 4): [6, 2], (3, 3): [7, 7],
....: (2, 0): [10, 6], (8, 1): [4, 0], (7, 6): [5, 1],
....: (4, 4): [6, 6], (6, 3): [6, 2], (1, 5): [3, 7],
....: (8, 8): [2, 2], (7, 2): [5, 1], (3, 6): [2, 6],
....: (2, 2): [8, 8], (7, 7): [3, 3], (5, 7): [1, 5],
....: (5, 3): [7, 3], (4, 1): [8, 4], (1, 1): [9, 9],
....: (2, 7): [1, 5], (3, 2): [9, 5], (0, 0): [10, 10],
....: (6, 6): [4, 4], (5, 0): [7, 3], (7, 1): [5, 1],
....: (4, 5): [3, 7], (0, 4): [4, 8], (5, 5): [5, 5],
....: (1, 4): [4, 8], (6, 0): [6, 2], (7, 5): [5, 1],
....: (2, 3): [5, 9], (2, 1): [10, 6], (8, 7): [4, 0],
....: (6, 8): [0, 4], (4, 2): [8, 4], (1, 0): [11, 7],
....: (0, 8): [0, 4], (6, 5): [6, 2], (3, 5): [3, 7],
....: (0, 1): [7, 11], (8, 3): [4, 0], (7, 0): [5, 1],
```

```
....: (4, 6): [2, 6], (6, 7): [1, 5], (8, 6): [4, 0],
....: (5, 2): [7, 3], (6, 1): [6, 2], (3, 1): [9, 5],
....: (8, 2): [4, 0], (2, 4): [4, 8], (3, 8): [0, 4],
....: (0, 6): [2, 6], (1, 8): [0, 4], (6, 2): [6, 2],
....: (4, 3): [8, 4], (1, 7): [1, 5], (0, 5): [3, 7],
....: (3, 4): [4, 8], (0, 2): [6, 10], (8, 4): [4, 0]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash() # optional - lrs
[[(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)]]

sage: g =
game_theory.normal_form_games.TravellersDilemma(5)
sage: g
Travellers dilemma - Normal Form Game with the
following utilities: ...
sage: d = {(0, 1): [2, 6], (1, 2): [1, 5], (3, 2): [4, 0],
....: (0, 0): [5, 5], (3, 3): [2, 2], (3, 0): [4, 0],
....: (3, 1): [4, 0], (2, 1): [5, 1], (0, 2): [1, 5],
....: (2, 0): [5, 1], (1, 3): [0, 4], (2, 3): [0, 4],
....: (2, 2): [3, 3], (1, 0): [6, 2], (0, 3): [0, 4],
....: (1, 1): [4, 4]}
sage: g == d
True
sage: g.obtain_nash()
[[(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)]]
```

المباريات التعاونية بإستخدام SageMath

في المباريات غير التعاونية التي سبق التعامل معها كان يسمح للاعبين التواصل مع بعضهم و لكن كان غير مسموح لهم بعقد إتفاقيات بينهم. في المباريات التعاونية يسمح بالإضافة إلى التواصل عقد الإتفاقيات و تكوين تحالفات Coalitions و سوف نستعرض المباريات ذات الشكل التحالفي Games in Coalitional Form

مباريات ماني - بيرسون Many-Prson Games

1- لاتوجد أي قيود او موانع على ألإتفاقات بين اللاعبين.

2- جميع المدفوعات لها نفس الصنف.

3- توجد منفعة متبادلة Transferrable Utility و التي تسمح بدفعات جانبية Side Payments بين اللاعبين.

(الدفعات الجانبية تستخدم لتحفيذ بعض اللاعبين لإستخدام إستراتيجية معينة)

4- بعض او كل اللاعبين قد يشكل تحالفات او إئتلافات مع بعضهم البعض.

الشكل التحالفي و دالة التمييز Coalitional Form. Characteristic Functions

لتكن $n \geq 2$ عدد اللاعبين في المباراة و الذين يعطى لهم الأرقام من 1 و حتى n و لنرمز لمجموعة اللاعبين $N = \{1,2,...n\}$

التحالف S يعرف على أنه مجموعة جزئية من N أي $S \subset N$ ومجموعة كل التحالفات نرمز لها بالرمز 2^N (المجوعة الخالية ϕ تسمى التحالف الخالى Empty Coalition) و المجموعة N التحلف الكلي Grand Coalition فمثلا لو كانت $n=2$ (أي لاعبين) فيمكن تكوين 4 تحالفات هي $\{\phi,\{1\},\{2\},N\}$ و لوكانت $n=3$ فيمكن تكوين 8 تحالفات $\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},N\}$ لعدد n من اللاعبين

مجموعة التحالفات 2^N تتكون من 2^n من العناصر.

تعريف:

الشكل التحالفي لمباراة لعدد n من الأشخاص *n-person* يرمز له (N,v) حيث

$N=\{1,2,...n\}$ مجموعة اللاعبين و v دالة حقيقية تسمى دالة التمييز

Characterstic Function للمباراة ومعرفة على المجموعة 2^N لجميع التحالفات وتحقق التالي:

1) $v(\phi)=0$ و

2) إذا كان S و T تحالفات منفصلة أي $S\cap T=\phi$ فيكون

$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)$ (تسمى هذه بخاصية الجمع الأقصى Superadditivity)

الكمية $v(S)$ هي عدد حقيقي لأي تحالف $S\subset N$ و الذي يمكن إعتباره لقيمة أو لإستحقاق أو لقوة التحالف S عندما يكون أعضائة يعملون كوحدة واحدة.

الشرط (1) يدل على أن المجموعة الخالية لها قيمة صفر و الشرط (2) يدل على ان قيمة تحالفين منفصلين (لايوجد أعضاء مشتركين) يكون على الأكثر مساوي لقيمة التحلفين لو أتحدوا معا وعملوا متفقين.

تعريف:

يقال ان دالة التمييز طردية Monotone إذا حققت الشرط $\forall T\subseteq S \quad v(S)\ge v(T)$

تعريف:

يقال عن مباراة في الشكل التحالفي انها ذات مجموع ثابت Constant-Sum إذا تحقق الشرط $v(S)+v(\overline{S})=v(N)$ لجميع التحالفات $S\in 2^N$ ويقال انها ذات مجموع صفري Zero-Sum إذا كان $v(N)=0$.

مثال:

لنعتبر مباراة 3 أشخاص نرمز لهم I و II و III لكل واحد منهم إستراجيتين 1 و 2

مصفوفات المدفوعات

1) إذا أختار I الإستراتيجية 1

1		III	
		1	2
II	1	$(0,3,1)$	$(2,1,1)$
	2	$(4,2,3)$	$(1,0,0)$

2) إذا أختار I الإستراتيجية 1

2		III	
		1	2
II	1	$(1,0,0)$	$(1,1,1)$
	2	$(0,0,1)$	$(0,1,1)$

لنوجد دالة التمييز v للمباراة في الشكل التحالفي:

نلخص الإستراتيجيات كالتالي للاعب I:

I1: first **row**

(I1,II1,III1): (0,3,1)

(I1,II1,III2): (2.1.1)

(I1,II2,III1): (4,2,3)

(I1,II2,III2): (1,0,0)

I2: second **row**

(I2,II1,III1): (1,0,0)

(I2,II1,III2): (1,1,1)

(I2,II2,III1): (0,0,1)

(I2,II2,III2): (0,1,1)

نعلم أن $v(\phi)=0$

$v(N)$ هي أكبر مجموع من الخلايا الثمانية وهي الخلية $(1,2,1)$ والتي تحوي $(4,2,3)$

وتعطي مدفوع $v(N)=9$ و لكي نوجد $v(\{1\})$ نحسب مصفوفة المدفوعات لأرباح I ضد (II,III):

		(II,III)			
		1,1	1,2	2,1	2,2
I	1	0	2	4	1
	2	1	1	0	0

نوجد قيمة المباراة

```
sage: A = matrix([[0, 2, 4, 1 ],[1, 1, 0, 0 ]])
sage: gI = NormalFormGame([A])
sage: M = gI.obtain_nash()
sage: M
[[(1/2, 1/2), (1/2, 0, 0, 1/2)]]
sage: for ne in gI.obtain_nash():
...       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1])
1/2
```

تأكد من قيمة المباراة بإستخدام Gambit

إذا $v(\{1\})=1/2$.

بالمثل نوجد $v(\{2\})$

II1: first **row**

(I1,II1,III1): (0,3,1)

(I1,II1,III2): (2.1.1)

(I2,II1,III1): (1,0,0)

(I2,II1,III2): (1,1,1)

II2: second **row**

(I1,II2,III1): (4,2,3)

(I1,II2,III2): (1,0,0)

(I2,II2,III1): (0,0,1)

(I2,II2,III2): (0,1,1)

		(I,III)			
		1,1	1,2	2,1	2,2
II	1	3	1	0	1
	2	2	0	0	1

```
sage: A = matrix([[3, 1, 0, 1 ],[2, 0, 0, 1 ]])
sage: gII = NormalFormGame([A])
sage: M = gII.obtain_nash()
sage: M
[[(0, 1), (0, 0, 1, 0)], [(1, 0), (0, 0, 1, 0)]]
sage: for ne in gII.obtain_nash():
...       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1])
0
0
```

تأكد من قيمة المباراة بإستخدام Gambit

أي $v(\{2\}) = 0$

بالمثل نوجد $v(\{3\})$

III1: first **row**

(I1,II1,III1): (0,3,1)

(I1,II2,III1): (4,2,3)

(I2,II1,III1): (1,0,0)

(I2,II2,III1): (0,0,1)

III2: second **row**

(I1,II1,III2): (2.1.1)

(I1,II2,III2): (1,0,0)

(I2,II1,III2): (1,1,1)

(I2,II2,III2): (0,1,1)

$$
\begin{array}{cc} & (I,II) \\ & \begin{array}{cccc} 1,1 & 1,2 & 2,1 & 2,2 \end{array} \\ III \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

```
sage: A = matrix([[1, 3, 0, 1 ],[1, 0, 1, 1 ]])
sage: gIII = NormalFormGame([A])
sage: M = gIII.obtain_nash()
sage: M
[[(1/4, 3/4), (0, 1/4, 3/4, 0)]]
sage: for ne in gIII.obtain_nash():
...       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1])
3/4
```

تأكد من قيمة المباراة بإستخدام Gambit

أي $v(\{3\})=3/4$

لكي نوجد $v(\{1,3\})$ نكون مصفوفة مجموع ارباح I و III ضد II كالتالي:

I,III: II1 first **column**

(I1,II1,III1): (0,3,1) 1

(I1,II1,III2): (2,1,1) 3

(I2,II1,III1): (1,0,0) 1

(I2,II1,III2): (1,1,1) 2

I,III: II2 second **column**

(I1,II2,III1): (4,2,3) 7

(I1,II2,III2): (1,0,0) 1

(I2,II2,III1): (0,0,1) 1

(I2,II2,III2): (0,1,1) 1

		II	
		1	2
I,III	1,1	1	7
	1,2	3	1
	2,1	1	1
	2,2	2	1

```
sage: A = matrix([[1, 7], [3, 1 ],[1, 1], [2, 1 ]])
sage: gI_III = NormalFormGame([A])
sage: M = gI_III.obtain_nash()
sage: M
[[(1/4, 3/4, 0, 0), (3/4, 1/4)]]
```

```
sage: for ne in gI_III.obtain_nash():
...       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1])
5/2
```

أي $v(\{1,3\})=5/2$

تأكد من قيمة المباراة بإستخدام Gambit

وبالمثل نوجد مصفوفات I و II ضد III لنوجد $v(\{1,2\})$ و II و III ضد I لنوجد

$v(\{2,3\})$

I,II: III1 first **column**

(I1,II1,III1): (0,3,1) 3

(I1,II2,III1): (4,2,3) 6

(I2,II1,III1): (1,0,0) 1

(I2,II2,III1): (0,0,1) 0

I,II: III2 second **column**

(I1,II1,III2): (2,1,1) 3

(I1,II2,III2): (1,0,0) 1

(I2,II1,III2): (1,1,1) 2

(I2,II2,III2): (0,1,1) 1

		III	
		1	2
I,*II*	1,1	3	3
	1,2	6	1
	2,1	1	2
	2,2	0	1

```
sage: A = matrix([[3, 3], [6, 1 ],[1, 2], [0, 1 ]])
sage: gI_II_III = NormalFormGame([A])
sage: M = gI_II_III.obtain_nash()
sage: M
[[(1, 0, 0, 0), (0, 1)]]
sage: for ne in gI_II_III.obtain_nash():
...       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1])
3
```

أي $v(\{1,2\})=3$

II,III: I1 first **column**

(I1,II1,III1): (0,3,1) 4

(I1,II1,III2): (2,1,1) 2

(I1,II2,III1): (4,2,3) 5

(I1,II2,III2): (1,0,0) 0

II,III: I2 second **column**

(I2,II1,III1): (1,0,0) 0

(I2,II1,III2): (1,1,1) 2

(I2,II2,III1): (0,0,1) 1

(I2,II2,III2): (0,1,1) 2

		I	
		1	2
II, III	1,1	4	0
	1,2	2	2
	2,1	5	1
	2,2	0	2

```
sage: A = matrix([[4, 0], [2, 2 ],[5, 1], [0, 2 ]])
sage: gII_III_I = NormalFormGame([A])
sage: M = gII_III_I.obtain_nash()
sage: M
[[(0, 1, 0, 0), (0, 1)]]
sage: for ne in gII_III_I.obtain_nash():
...       print vector(ne[0]) * A * vector(ne[1])
2
```

وبهذا تكون الدالة التمييزية $v(\{2,3\})=2$

$v(\phi)=0$
$v(\{1\})=0.5$
$v(\{2\})=0$
$v(\{3\})=0.75$
$v(\{1,2\})=3$
$v(\{1,3\})=2.5$
$v(\{2,3\})=2$
$v(\{N\})=9$

تمارين:

أوجد الدالة المميزة للمباريات التالية

1)

$I,1$ III

		1	2
II	1	$(-2,1,1)$	$(1,-4,3)$
	2	$(1,3,-4)$	$(10,-5,-4)$

$I,2$ III

		1	2
II	1	$(-1,-2,3)$	$(-4,2,2)$
	2	$(12,-6,-6)$	$(-1,3,-2)$

2)

$I,1$ III

		1	2
II	1	$(1,2,1)$	$(3,0,1)$
	2	$(-1,6,-3)$	$(3,2,1)$

$I,2$ III

		1	2
II	1	$(-1,2,4)$	$(1,0,3)$
	2	$(7,5,4)$	$(3,2,1)$

التكلفة الإرضائية و النواة Imputation and the Core

في المباريات التعاونية يعتبر التحالف الكلي هو الأفضل لجميع اللاعبين. فحسب خاصية الجمع الأقصى Superadditivity المدفوع $v(N)$ هو أكبر من أي مجموع يحصل علية أي تحالف. هنا سوف نستعرض كيفية الإتفاق على تقاسم المدفوع الناتج من أي تحالف بشكل عادل للجميع بحيث لن يكون هناك دافع لأي جهة لفك التحالف. تقاسيم العائد الكلي تسمى نقاط النواة.

التكلفة الإرضائية Imputation

ليكن $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ متجه المدفوعات للمقادير المقترح توزيعها على اللاعبين.

x_i المقدار المدفوع للاعب i يسمى التكلفة الإرضائية. الخاصية المرغوبة في التكلفة الإرضائية هي أن يكون المجموع للتكاليف الإرضائية يساوي $v(N)$.

تعريف:

متجه المدفوعات $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ يقال انه صائب للمجموعة Group Rational أو فعال Efficient إذا تحقق الشرط $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$

أي لاعب لن يقبل ان يدفع له من التحالف مدفوع أقل مما يتحصل عليه بدون الإلتحاق بالتحالف (أي ان يلعب منفردا). ولهذا يوضع شرط طبيعي آخر وهو $x_i \geq v(\{i\})$ لكل اللاعبين.

تعريف:

متجه المدفوعات $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ يقال انه صائب فرديا Individually Rational إذا تحقق $x_i \geq v(\{i\})$ لجميع قيم $i=1,2,...,n$.

التكاليف الإرضائية تعرف على انها متجهات المدفوعات التي تحقق الشرطين السابقين.

تعريف:

التكلفة الإرضائية هي متجه مدفوعات صائب للمجموعة و صائب للفرد ومجموعة التكاليف تكتب على الشكل

$$\left\{\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):\sum i\in N\, x_i=v(N) \text{ and } x_i\geq v(\{i\})\ \forall i\in N\right\}$$

وهكذا فإن تكاليف الترضية هي متجه نوني $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ بحيث $x_i\geq v(\{i\})$ لجميع قيم $i=1,2,...,n$ و $\sum_{i=1}^{n} x_i=v(N)$. مجموعة تكاليف الترضية لايمكن أن تكون خالية.

المباريات الأساسية Essential Games

يقال عن مباراة في الشكل التحالفي انها غير أساسية إذا تحقق الشرط

$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})=v(N)$ و أساسية إذا $\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})<v(N)$.

النواة The Core

تعريف:

يقال ان التكلفة الإرضائية $\boldsymbol{x}$ غير متوازنة خلال التحالف S إذا كان $v(S)>\sum i\in S\, x_i$ و غير متوازنة إذا وجد تحالف S بحيث تكون $\boldsymbol{x}$ غير متوازنة خلال S وإلا فإنها متوازنة.

تعريف:

المجموعة C من التكاليف الإرضائية المتوازنة تسمى نواة

$$C=\left\{\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):\sum i\in N\,x_i=v(N)\text{ and }\sum i\in S\,x_i\geq v(S)\ \forall S\in N\right\}$$

ملاحظة: النواة قد تكون مجموعة خالية. لأنه قد يكون من المستحيل إرضاء كل التحالفات في نفس الوقت.

يؤخذ حجم النواة كمقياس للتوازن او ماهو إحتمال تفكك اي تحالف.

مثال:

لنأخذ المباراة ذات دالة التمييز

$$\begin{array}{cccc} & v(\{1\})=1 & v(\{1,2\})=4 & \\ v(\phi)=0 & v(\{2\})=0 & v(\{1,3\})=3 & v(\{1,2,3\})=8 \\ & v(\{3\})=1 & v(\{2,3\})=5 & \end{array}$$

التكاليف الإرضائية هي النقاط $\left(x_1,x_2,x_3\right)$ و التي تحقق

$$x_1+x_2+x_3=8,\quad x_1\geq 1,x_2\geq 0,x_3\geq 1$$

تعريف:

مباراة بدالة تمييز v يقال انها متناظرة إذا كان $v(S)$ يعتمد فقط على عدد عناصر S أي مثلا $v(S)=f\left(|S|\right)$ لدالة ما f .

قيمة شابلي The Shapley Value

دالة القيمة ϕ تحدد لكل دالة تمييز v القيم $\phi(v)=\left(\phi_1(v),\phi_2(v),...,\phi_n(v)\right)$ من الأعداد الحقيقية حيث $\phi_i(v)$ تمثل قيمة او اهمية اللاعب i في المباراة.

فرضية شابلي:

(فرضية الإنصاف Fairness) للدالة $\phi(v)$:

1) فعالية Efficiency : $\sum i\in N\,\phi_i(v)=v(N)$

2) تناظر Symmetry: إذا كان i و j يحققوا $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ لكل التحالفات S التي لاتحوي i و j عندئذ $\phi_i(v)=\phi_j(v)$

3) صوري أو وهمي Dummy Axiom : إذا كانت i تحقق $v(S)=v(S\cup\{i\})$ لكل تحالف S لايحتوي i عندئذ $\phi_i(v)=0$

4) الإضافية Additivity: إذا كان u و v دوال تمييز عندئذ

$$\phi(u+v)=\phi(u)+\phi(v)$$

سوف نذكر النظرية التالية بدون برهان (البرهان موجود في المرجع (1))

نظرية:

توجد دالة وحيدة ϕ تحقق فرضيات شابلي.

حساب قيمة شابلي:

قيمة شابلي $\phi=(\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)$ تحسب من العلاقة

$$\phi_i(v)=\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\left[v(S)-v(S-\{i\})\right],\ i=1,...,n$$

في هذه الصيغة نجمع على كل التحالفات S التي تحوي i . الكميات $v(S)-v(S-\{i\})$ هي المقدار الذي يضاف للتحالف S بدون i (والذي رمزنا له بـ $v(S-\{i\})$) بعد إنضمام i للتحالف S.

حساب قيمة شابلي بإستخدام الوحدة الجزئية module لنظرية المباريات التعاونية في SageMath

مثال: (أنظر ملحق SageMath)

سوف نحسب قيمة شابلي لدالة التمييز التالية بإستخدام Sage

$$v(\phi)=0$$
$$v(\{1\})=1$$
$$v(\{2\})=0$$
$$v(\{3\})=1$$
$$v(\{1,2\})=4$$
$$v(\{1,3\})=3$$
$$v(\{2,3\})=5$$
$$v(\{1,2,3\})=8$$

افتح الموقع:

https://sagecell.sagemath.org/

ثم أدخل التالي:

```
integer_function = { ():0, (1,):1, (2,):0, (3,):1,
(1,2,):4, (1,3,):3, (2,3,):5, (1,2,3,):8}
integer_game = CooperativeGame(integer_function)
integer_game
integer_game.shapley_value()
integer_game.is_monotone()
integer_game.is_superadditive()
```

The Sage Notebook
Version 6.8

admin | Home | Published | Log | Settings | Help | Report a Problem | Sign out

or382-002

last edited Aug 16, 2015, 10:48:41 AM by admin

Save | Save & quit | Discard & quit

File... | Action... | Data... | sage | Typeset | Load 3-D Live | Use java for 3-D

Print | Worksheet | Edit | Text | Revisions | Share | Publish

View plain text

```
sage: integer_function = { ():0,
...                        (1,):1,
...                        (2,):0,
...                        (3,):1,
...                        (1,2,):4,
...                        (1,3,):3,
...                        (2,3,):5,
...                        (1,2,3,):8}
...
sage: integer_game = CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.is_monotone()
True
sage: integer_game.is_superadditive()
True
sage: integer_game
A 3 player co-operative game
sage: integer_game.shapley_value()
{1: 7/3, 2: 17/6, 3: 17/6}
```

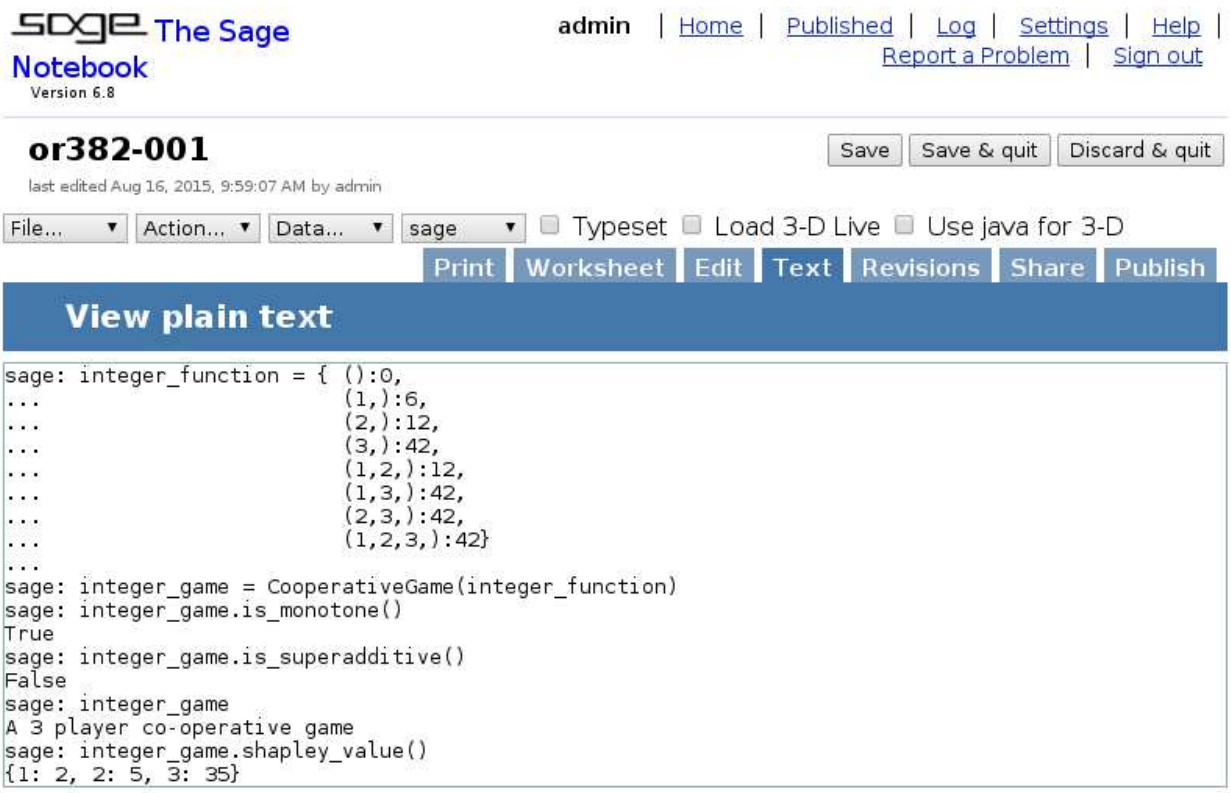
إذا يقسم المبلغ الكلي 8 على اللاعبين بحيث يحصل اللاعب الأول على 7/3 وكل من اللاعبين الثاني والثالث على 17/6 لكل منهم.

مثال آخر:

```
i_fun = { ():0, (1,):0.5, (2,):0, (3,):0.75,
(1,2,):3, (1,3,):2.5, (2,3,):2, (1,2,3,):9}
l_g = CooperativeGame(i_fun)
l_g
```

```
l_g.shapley_value()
l_g.is_monotone()
l_g.is_superadditive()
```

مثال آخر:


The Sage Notebook
Version 6.8
admin | Home | Published | Log | Settings | Help | Report a Problem | Sign out
or382-001
last edited Aug 16, 2015, 9:59:07 AM by admin
Save
Save & quit
Discard & quit
File...
Action...
Data...
sage
Typeset
Load 3-D Live
Use java for 3-D
Print
Worksheet
Edit
Text
Revisions
Share
Publish
View plain text
sage: integer_function = { ():0,
... (1,):6,
... (2,):12,
... (3,):42,
... (1,2,):12,
... (1,3,):42,
... (2,3,):42,
... (1,2,3,):42}
...
sage: integer_game = CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.is_monotone()
True
sage: integer_game.is_superadditive()
False
sage: integer_game
A 3 player co-operative game
sage: integer_game.shapley_value()
{1: 2, 2: 5, 3: 35}

أمثلة:

```
sage: integer_function = {(): 0,
....:                     (1,): 6,
....:                     (2,): 12,
....:                     (3,): 42,
....:                     (1, 2,): 12,
....:                     (1, 3,): 42,
....:                     (2, 3,): 42,
....:                     (1, 2, 3,): 42}
sage: integer_game =
CooperativeGame(integer_function)

sage: letter_function = {(): 0,
....:                    ('A',): 6,
....:                    ('B',): 12,
....:                    ('C',): 42,
....:                    ('A', 'B',): 12,
....:                    ('A', 'C',): 42,
....:                    ('B', 'C',): 42,
....:                    ('A', 'B', 'C',): 42}
sage: letter_game =
CooperativeGame(letter_function)

sage: letter_function = {(): 0,
....:                    ('A',): 6,
....:                    ('B',): 12,
....:                    ('C',): 42,
```

```
....:                         ('A', 'B',): 12,
....:                         ('A', 'C',): 42,
....:                         ('B', 'C',): 42,
....:                         ('A', 'B', 'C',): 42}
sage: letter_game = ooperativeGame(letter_function)
sage: letter_game.is_monotone()
sage: letter_game.is_superadditive()

sage: letter_game

sage: letter_game.shapley_value()

sage: payoff_vector = letter_game.shapley_value()
sage: letter_game.is_efficient(payoff_vector)
sage: letter_game.nullplayer(payoff_vector)
sage: letter_game.is_symmetric(payoff_vector)

sage: payoff_vector = {'A': 0, 'C': 35, 'B': 3}
sage: letter_game.is_efficient(payoff_vector)
sage: letter_game.nullplayer(payoff_vector)
sage: letter_game.is_symmetric(payoff_vector)


sage: letter_function = {(): 0,
....:                         ('A',): 6,
....:                         ('B',): 12,
....:                         ('C',): 42,
```

```
....:                     ('A', 'B',): 12,
....:                     ('C', 'A',): 42,
....:                     ('B', 'C',): 42,
....:                     ('B', 'A', 'C',): 42}
sage: letter_game = ooperativeGame(letter_function)
sage: letter_game.shapley_value()
{'A': 2, 'B': 5, 'C': 35}
sage: letter_game.is_monotone()
sage: letter_game.is_superadditive()
sage: letter_game.is_efficient({'A': 2, 'C': 35,
'B': 5})
sage: letter_game.nullplayer({'A': 2, 'C': 35, 'B':
5})
sage: letter_game.is_symmetric({'A': 2, 'C': 35,
'B': 5})

sage: letter_game.is_efficient({'A': 0, 'C': 35,
'B': 3})
sage: letter_game.nullplayer({'A': 0, 'C': 35, 'B':
3})
sage: letter_game.is_symmetric({'A': 0, 'C': 35,
'B': 3})

sage: letter_function = {(): 0,
....:                     ('A',): 6,
....:                     ('B',): 12,
....:                     ('C',): 42,
```

```
....:                         ('A', 'B',): 12,
....:                         ('A', 'C',): 42,
....:                         ('B', 'C',): 42,
....:                         ('A', 'B', 'C',): 42}
sage: letter_game =
CooperativeGame(letter_function)
sage: letter_game.is_efficient({'A': 14, 'B': 14,
'C': 14})
sage: letter_function = {(): 0,
....:                         ('A',): 6,
....:                         ('B',): 12,
....:                         ('C',): 42,
....:                         ('A', 'B',): 12,
....:                         ('A', 'C',): 42,
....:                         ('B', 'C',): 42,
....:                         ('A', 'B', 'C',): 42}
sage: letter_game = ooperativeGame(letter_function)
sage: letter_game.is_efficient({'A': 10, 'B': 14,
'C': 14})

sage: long_function = {(): 0,
....:                         (1,): 0,
....:                         (2,): 0,
....:                         (3,): 0,
....:                         (4,): 0,
....:                         (1, 2): 0,
....:                         (1, 3): 0,
```

```
....:                         (1, 4): 0,
....:                         (2, 3): 0,
....:                         (2, 4): 0,
....:                         (3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3): 0,
....:                         (1, 2, 4): 45,
....:                         (1, 3, 4): 40,
....:                         (2, 3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3, 4): 65}
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
sage: long_game.is_efficient({1: 20, 2: 20, 3: 5,
4: 20})

sage: integer_function = {(): 0,
....:                         (1,): 6,
....:                         (2,): 12,
....:                         (3,): 42,
....:                         (1, 2,): 12,
....:                         (1, 3,): 42,
....:                         (2, 3,): 42,
....:                         (1, 2, 3,): 42}
sage: integer_game =
CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.is_monotone()


sage: integer_function = {(): 0,
```

```
....:                         (1,): 6,
....:                         (2,): 12,
....:                         (3,): 42,
....:                         (1, 2,): 10,
....:                         (1, 3,): 42,
....:                         (2, 3,): 42,
....:                         (1, 2, 3,): 42}
sage: integer_game =
CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.is_monotone()

sage: long_function = {(): 0,
....:                         (1,): 0,
....:                         (2,): 0,
....:                         (3,): 0,
....:                         (4,): 0,
....:                         (1, 2): 0,
....:                         (1, 3): 0,
....:                         (1, 4): 0,
....:                         (2, 3): 0,
....:                         (2, 4): 0,
....:                         (3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3): 0,
....:                         (1, 2, 4): 45,
....:                         (1, 3, 4): 40,
....:                         (2, 3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3, 4): 65}
```

```
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
sage: long_game.is_monotone()


sage: integer_function = {(): 0,
....:                     (1,): 6,
....:                     (2,): 12,
....:                     (3,): 42,
....:                     (1, 2,): 12,
....:                     (1, 3,): 42,
....:                     (2, 3,): 42,
....:                     (1, 2, 3,): 42}
sage: integer_game =
CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.is_superadditive()

sage: A_function = {(): 0,
....:               (1,): 6,
....:               (2,): 12,
....:               (3,): 42,
....:               (1, 2,): 18,
....:               (1, 3,): 48,
....:               (2, 3,): 55,
....:               (1, 2, 3,): 80}
sage: A_game = CooperativeGame(A_function)
sage: A_game.is_superadditive()
```

```
sage: long_function = {(): 0,
....:                  (1,): 0,
....:                  (2,): 0,
....:                  (3,): 0,
....:                  (4,): 0,
....:                  (1, 2): 0,
....:                  (1, 3): 0,
....:                  (1, 4): 0,
....:                  (2, 3): 0,
....:                  (2, 4): 0,
....:                  (3, 4): 0,
....:                  (1, 2, 3): 0,
....:                  (1, 2, 4): 45,
....:                  (1, 3, 4): 40,
....:                  (2, 3, 4): 0,
....:                  (1, 2, 3, 4): 65}
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
sage: long_game.is_superadditive()

sage: long_function = {(): 0,
....:                  (1,): 0,
....:                  (2,): 0,
....:                  (3,): 55,
....:                  (4,): 0,
....:                  (1, 2): 0,
....:                  (1, 3): 0,
....:                  (1, 4): 0,
```

```
....:                         (2, 3): 0,
....:                         (2, 4): 0,
....:                         (3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3): 0,
....:                         (1, 2, 4): 45,
....:                         (1, 3, 4): 40,
....:                         (2, 3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3, 4): 85}
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
sage: long_game.is_superadditive()

sage: letter_function = {(): 0,
....:                         ('A',): 6,
....:                         ('B',): 12,
....:                         ('C',): 42,
....:                         ('A', 'B',): 12,
....:                         ('A', 'C',): 42,
....:                         ('B', 'C',): 42,
....:                         ('A', 'B', 'C',): 42}
sage: letter_game =
CooperativeGame(letter_function)
sage: letter_game.is_symmetric({'A': 5, 'B': 14,
'C': 20})

sage: integer_function = {(): 0,
....:                         (1,): 12,
....:                         (2,): 12,
```

```
....:                         (3,): 42,
....:                         (1, 2,): 12,
....:                         (1, 3,): 42,
....:                         (2, 3,): 42,
....:                         (1, 2, 3,): 42}
sage: integer_game =
CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.is_symmetric({1: 2, 2: 5, 3:
35})

sage: long_function = {(): 0,
....:                         (1,): 0,
....:                         (2,): 0,
....:                         (3,): 0,
....:                         (4,): 0,
....:                         (1, 2): 0,
....:                         (1, 3): 0,
....:                         (1, 4): 0,
....:                         (2, 3): 0,
....:                         (2, 4): 0,
....:                         (3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3): 0,
....:                         (1, 2, 4): 45,
....:                         (1, 3, 4): 40,
....:                         (2, 3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3, 4): 65}
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
```

```
sage: long_game.is_symmetric({1: 20, 2: 20, 3: 5,
4: 20})

sage: letter_function = {(): 0,
....:                    ('A',): 0,
....:                    ('B',): 12,
....:                    ('C',): 42,
....:                    ('A', 'B',): 12,
....:                    ('A', 'C',): 42,
....:                    ('B', 'C',): 42,
....:                    ('A', 'B', 'C',): 42}
sage: letter_game =
CooperativeGame(letter_function)
sage: letter_game.nullplayer({'A': 0, 'B': 14, 'C':
14})

sage: A_function = {(): 0,
....:               (1,): 0,
....:               (2,): 12,
....:               (3,): 42,
....:               (1, 2,): 12,
....:               (1, 3,): 42,
....:               (2, 3,): 55,
....:               (1, 2, 3,): 55}
sage: A_game = CooperativeGame(A_function)
sage: A_game.nullplayer({1: 10, 2: 10, 3: 25})
```

```
sage: long_function = {(): 0,
....:                  (1,): 0,
....:                  (2,): 0,
....:                  (3,): 0,
....:                  (4,): 0,
....:                  (1, 2): 0,
....:                  (1, 3): 0,
....:                  (1, 4): 0,
....:                  (2, 3): 0,
....:                  (2, 4): 0,
....:                  (3, 4): 0,
....:                  (1, 2, 3): 0,
....:                  (1, 2, 4): 45,
....:                  (1, 3, 4): 40,
....:                  (2, 3, 4): 0,
....:                  (1, 2, 3, 4): 65}
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
sage: long_game.nullplayer({1: 20, 2: 20, 3: 5, 4:
20})

sage: A_function = {(): 0,
....:               (1,): 42,
....:               (2,): 12,
....:               (3,): 0,
....:               (1, 2,): 55,
....:               (1, 3,): 42,
....:               (2, 3,): 12,
```

```
....:                     (1, 2, 3,): 55}
sage: A_game = CooperativeGame(A_function)
sage: A_game.nullplayer({1: 10, 2: 10, 3: 25})

sage: integer_function = {(): 0,
....:                     (1,): 6,
....:                     (2,): 12,
....:                     (3,): 42,
....:                     (1, 2,): 12,
....:                     (1, 3,): 42,
....:                     (2, 3,): 42,
....:                     (1, 2, 3,): 42}
sage: integer_game =
CooperativeGame(integer_function)
sage: integer_game.player_list
sage: integer_game.shapley_value()

sage: long_function = {(): 0,
....:                     (1,): 0,
....:                     (2,): 0,
....:                     (3,): 0,
....:                     (4,): 0,
....:                     (1, 2): 0,
....:                     (1, 3): 0,
....:                     (1, 4): 0,
....:                     (2, 3): 0,
....:                     (2, 4): 0,
```

```
....:                         (3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3): 0,
....:                         (1, 2, 4): 45,
....:                         (1, 3, 4): 40,
....:                         (2, 3, 4): 0,
....:                         (1, 2, 3, 4): 65}
sage: long_game = CooperativeGame(long_function)
sage: long_game.shapley_value()
```

مباريات التطابق أو التوائم **Matching Games**:

هي مباريات تنمذج حالة تتكون من مجتمع من N من المطالبين Suitors و N من المراجعين Reviewers كل من المطالبين و المراجعين يرتب أفضلياته Rank Preferences ويحاولوا إيجاد تطابق.

تعريف:

المباراة التطابقية من الحجم N تعرف على مجموعتين منفصلتين S و R ذاتي الحجم N بقران او ربط كل عنصر من S و R بقائمة أفضلية Preference List :

$$f: S \to R^N \quad and \quad g: R \to S^N$$

مثال:

المجموعتين

$$S = \{J, K, L, M\}$$
$$R = \{A, B, C, D\}$$

و دوال افضلية

$$f(s) = \begin{cases} (A, D, C, B) & if \ s = J, \\ (A, B, C, D) & if \ s = K, \\ (B, D, C, A) & if \ s = L, \\ (C, A, B, D) & if \ s = M, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} (L, J, K, M) & if \ s = A, \\ (J, M, L, K) & if \ s = B, \\ (K, M, L, J) & if \ s = C, \\ (M, K, J, L) & if \ = s = D. \end{cases}$$

سوف ننفذ النموذج في Sage

```
sage: suitr_pref = {'J': ('A', 'D', 'C', 'B'),
....:               'K': ('A', 'B', 'C', 'D'),
....:               'L': ('B', 'D', 'C', 'A'),
....:               'M': ('C', 'A', 'B', 'D')}
sage: reviewr_pref = {'A': ('L', 'J', 'K', 'M'),
....:                 'B': ('J', 'M', 'L', 'K'),
....:                 'C': ('K', 'M', 'L', 'J'),
....:                 'D': ('M', 'K', 'J', 'L')}
sage: m = MatchingGame([suitr_pref, reviewr_pref])
sage: m
A matching game with 4 suitors and 4 reviewers
sage: m.suitors()
('K', 'J', 'M', 'L')
sage: m.reviewers()
('A', 'C', 'B', 'D')
```

تعريف:

التطابق M هو أي تناظر ثنائي Bijection بين S و R . إذا كان $s \in S$ و $r \in R$ تمت مطابقتهم بواسطة M نرمز لهذا بـ $M(s)=r$.

لأي مباراة تطابقية نحاول إيجاد تطابق مستقر Stable أي بمعنى أنه لايوجد حافذ او مبرر لأي طرف في رفض التطابق الحالي.

تعريف:

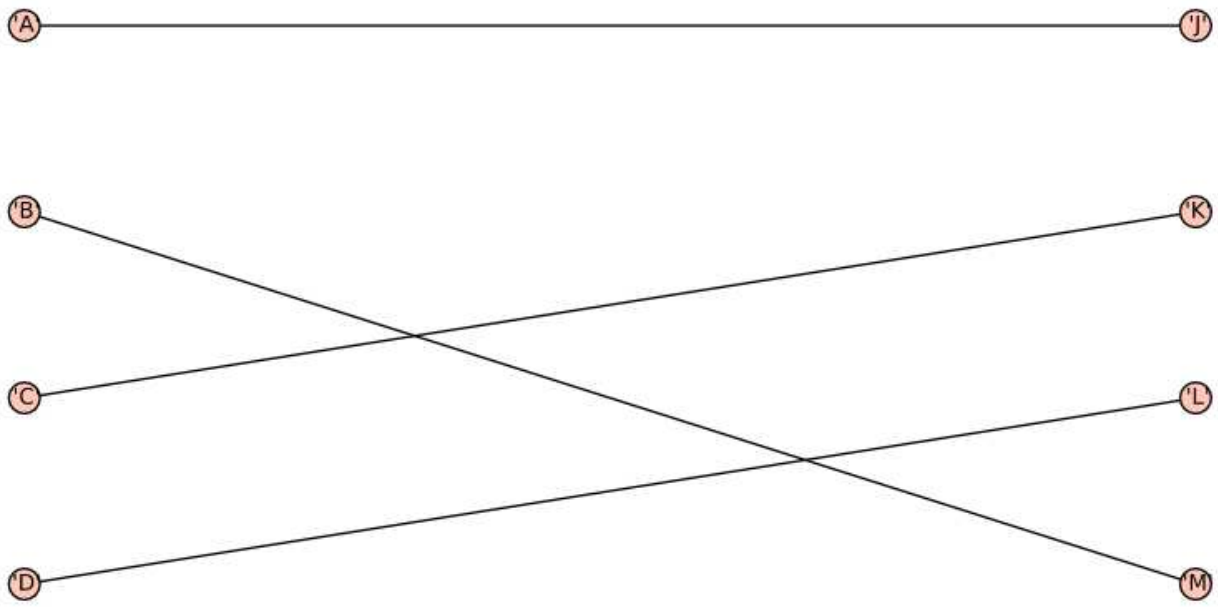
التطابق المستقر هو الذي لايحوي زوجين حاجزين Blocking Pairs و الزوجين الحاجزين هم أي زوج (s,r) بحيث $M(s) \neq r$ و لكن s تفضل r بدل $M(r)$ و r تفضل s بدل $M^{-1}(r)$.

إيجاد التطابق المستقر في Sage :

```
sage: m.solve()
{'J': 'A', 'K': 'C', 'L': 'D', 'M': 'B'}
```

يوجد تمثيل طبيعي للتطابق عن طريق الرسم الثنائي Bipartite Graphs

```
sage: plot(m)
Graphics object consisting of 13 graphics
primitives
```



مثال:

```
sage: left_dict = {'a': ('A', 'B', 'C'),
....:              'b': ('B', 'C', 'A'),
....:              'c': ('B', 'A', 'C')}
sage: right_dict = {'A': ('b', 'c', 'a'),
....:               'B': ('a', 'c', 'b'),
....:               'C': ('a', 'b', 'c')}
```

```
sage: quick_game = MatchingGame([left_dict,
right_dict])
sage: quick_game.solve()
{'a': 'A', 'b': 'C', 'c': 'B'}
sage: quick_game.solve(invert=True)
{'A': 'c', 'B': 'a', 'C': 'b'}


sage: suitr_pref = {'J': ('A', 'D', 'C', 'B'),
....:               'K': ('A', 'B', 'C', 'D'),
....:               'L': ('B', 'D', 'C', 'A'),
....:               'M': ('C', 'A', 'B', 'D')}
sage: reviewr_pref = {'A': ('L', 'J', 'K', 'M'),
....:                 'B': ('J', 'M', 'L', 'K'),
....:                 'C': ('K', 'M', 'L', 'J'),
....:                 'D': ('M', 'K', 'J', 'L')}
sage: m = MatchingGame([suitr_pref, reviewr_pref])
sage: m._suitors
['K', 'J', 'M', 'L']
sage: m._reviewers
['A', 'C', 'B', 'D']

sage: suit = {0: (3, 4),
....:         1: (3, 4)}
sage: revr = {3: (0, 1),
....:         4: (1, 0)}
sage: g = MatchingGame([suit, revr])
```

```
sage: g = MatchingGame(3)
sage: g

sage: for s in g.suitors():
....:             s, s.pref
                  (1, [])
                  (2, [])
                  (3, [])
sage: for r in g.reviewers():
....:             r, r.pref
                  (-1, [])
                  (-2, [])
                  (-3, [])

sage: g.solve()

sage: for s in g.suitors():
....:         s.pref = (-1, -2, -3)
sage: for r in g.reviewers():
....:         r.pref = (1, 2, 3)
sage: g.solve()
{1: -1, 2: -2, 3: -3}
```

المباريات التوافقية

المباريات التوافقية *Combinatorial Games* هي مباريات بين لاعبين *two-person* بمعلومات تامة ولا يوجد بها إختيار عشوائي ونتيجتها إما الربح أو الخسارة. تحدد هذه المباريات بمجموعة من المواقف وتشمل الوضع البدائي واللاعب الذي عليه التحرك أولا. اللعب يتحرك من موقف لآخر مع تداول اللاعبين الحركات حتى الوصول لوضع نهائي. والوضع النهائي هو موقف لايمكن التحرك منه. وهنا يعلن أحد اللاعبين فائز والآخر خاسر.

هذه المباريات يمكن أن تقسم إلى نوعين:

1- المباريات النزيهه *Impartial Games* والتي فيها يكون مجموعة الحركات الممكنة من أي وضع ما هي نفسها لكلا اللاعبين.

2- المباريات المحازبة *Partizan Games* والتي فيها يكون لكل لاعب مجموعة مختلفة من الحركات الممكنة من أي موضع معطى.

مثال: مباراة إزاحة بسيطة *A Simple Take-Away Game*:

قوانين مباراة توافقية نزيهه لإزاحة كرات من كومة من الكرات:

1- يوجد لاعبين إثنين نسمى الأول A والثاني B.

2- يوجد كومة من 21 كرة.

3- الحركة تتكون من إزاحة كرة أو كرتين أو ثلاثة كرات من الكومة ولابد من إزاحة كرة واحدة على الأقل ولايمكن إزاحة أكثر من ثلاثة كرات.

4- اللاعبين يتبادلا الحركات مع أن يبدأ اللاعب A اولا.

5- اللاعب الذي يزيح آخر كرة يربح المباراة (أي أن آخر لاعب يستطيع إزاحة كرات يربح وإذا لم يستطيع لاعب الحركة يخسر).

- كيف نحلل هذه المباراة؟
- هل يستطيع أحد الاعبين أن يفرض كسب هذه المباراة؟
- أي من الاعبين تفضل أن تكون الاعب الذي يبدأ المباراة أو اللاعب الذي يلعب تلاه؟
- ماهي الإستراتيجية الجيدة لكسب هذه المباراة؟

سوف نقوم بتحليل هذه المباراة من النهاية متراجعين إلى البداية. هذه الطريقة تسمى **الإستقراء الخلفي *Backward Induction* :**

إذا تبقي فقط كرة أو إثنين أو ثلاثة فالاعب الذي عليه القيام بالحركة التالية يكسب ببساطة بإزاحة كل الكرات الباقية.

لنفترض أن المتبقي 4 كرات فالاعب الذي سيتحرك تاليا ليس لديه خيار إلا أن يترك كرة أو إثنان أو ثلاثة وبالتالي فإن منافسه سيتمكن من الربح.

إذا وجود 4 كرات في نهاية المباراة سينتج عنه خسارة للاعب التالي. إذا بوجود 5 أو 6 أو 7 كرات فاللاعب الذي ستكون حركته التالية يستطيع الكسب بتركة 4 كرات. بوجود 8 كرات فعلى اللاعب الذي سيتحرك تاليا ترك 5 أو 6 أو 7 كرات وبهذا يستطيع الكسب في الحركة التالية.

وهكذا نرى أن المواقف بـ 0 أو 4 أو 8 أو 12 أو 16 أو ... كرات هي مواقف مستهدفة *Target Positions* أي مواقف نحب أن نصل إليها.

سوف نحلل المباراة ذات 21 كرة. حيث أن 21 لاتقسم 4 فإن اللاعب الذي سيلعب أولا يستطيع الكسب. فالحركة الوحيدة والمثلى له هي أخذ كرة وترك 20 وهذا موقف مستهدف.

<u>تعريف:</u>

المباراة التوافقية هي مباراة تحقق الشروط التالية:

1- يوجد إثنين من الاعبين.

2- توجد مجموعة غالبا محدودة من الحركات الممكنة للمباراة.

3- قواعد المباراة تحدد لكلا اللاعبين ولكل حركة أي من الحركات لأي موقع آخر هي حركة مشروعة أو صحيحة. إذا كانت قواعد المباراة لاتفرق بين اللاعبين أي كلا اللاعبين لديه نفس الخيارات في التحرك فإن المباراة تسمى نزيهة وإلا تسمى حزبية.

4- اللاعبين يتناوبا الحركات.

5- تنتهي المباراة عند الوصول لموقف بحيث لايمكن للاعب التالي التحرك.

6- تنتهي المباراة في عدد محدود من الحركات.

7- لاتوجد حركات تعتمد على الحظ.

8- المباريات التوافقية هي مباريات ذات معلومات تامة ولا يسمح فيها لحركات متزامنة أو حركات خفية أو إنسحاب أو تعادل.

المواقف *P* والمواقف *N* :*P-positions, N-positions*

بالعودة للمثال السابق رأينا أن المواقف 0 و 4 و 8 و 12 و 16 و ... هي مواقف رابحة للاعب السابق ***P****revious player* (للاعب الذي تحرك توا) وأن المواقف 1 و 2 و 3 و 5 و 6 و 7 و 9 و 10 و 11 و ... هي مواقف رابحة للاعب التالي ***N****ext player* الذي ستحرك.

المواقف الاولى تسمى المواقف P والأخرى تسمى المواقف N فالمواقف P هي تلك المواقف التي يتبقى فيها عدد من الكرات يقبل القسمة على 4 والتي تسمى المواقف المستهدفة في المثال السابق. في المباريات التوافقية يمكننا إيجاد أي من المواقف هي مواقف P وأي منها مواقف N بواسطة الإستقراء مستخدمين التوسيم *Labelling* التالي مبتدئين بموقف نهائي *Terminal Position* (هو الموقف الذي لايمكن التحرك منه).

الخوارزم التالي يوسم المواقف إما مواقف P أو N:

خطوة 1: أوسم كل موقف نهائي كموقف P.

خطوة 2: أوسم كل موقف يمكن الوصول إليه من موقف P في حركة واحدة كموقف N.
خطوة 3: اوجد المواقف التي لا يمكن التحرك منها إلا فقط لمواقف N و أوسم هذه المواقف كمواقف P.
خطوة 4: إذا لاتوجد مواقف P جديدة في الخطوة 3 توقف وإلا عد للخطوة 2 .
من السهل أن نلاحظ أن الإستراتيجية في التحرك لمواقف P هي إستراتيجية رابحة فمن مواقف P لايمكن لمنافسك إلا أن يتحرك لمواقف N وبالتالي فإنك ستتحرك لموقف P وهكذا حتى الوصول لموقف نهائي والذي هو موقف P وهكذا تربح المباراة.
خاصية المواقف P والمواقف N للمباريات التوافقية النزيهة:
المواقف P والمواقف N تحدد تكراريا بالخطوات التالية:
1- جميع المواقف النهائية هي مواقف P.
2- من كل موقف Nيوجد على الأقل حركة واحدة لموقف P.
3- من كل موقف P كل حركة تؤدي لموقف N.

المباريات الخصمية ***Subtraction Games*:**

سوف ننظر لفئة من المباريات التوافقية والتي تحوي مباريات الإزاحة البسيطة كحالة خاصة.
ليكن S مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة. المباراة الخصمية بمجموعة خصمية S تلعب كالتالي:
من كومة ذات عدد كبير وليكن n من الكرات يتناوب لاعبين الحركات. الحركة عبارة عن إزاحة s كرة من الكومة حيث $s \in S$ وآخر لاعب يستطيع الحركة يربح المباراة.
مباراة الإزاحة البسيطة في المثال السابق هي مباراة خصمية بمجموعة خصمية $S = \{1,2,3\}$.

للتوضيح دعنا نحلل مباراة خصمية ذات مجموعة خصمية $S = \{1,3,4\}$ وذلك بإيجاد المواقف P.

يوجد فقط موقف نهائي واحد وهو 0. عندئذ 1 و 3 و 4 هي مواقف N لأن بالإستطاعة التحرك منها إلى 0. ولكن 2 يجب أن تكون موقف P لأن الحركة الشرعية الوحيدة من 2 هي لـ 1 والذي هو موقف N عندئذ المواقف 5 و 6 يجب أن تكون مواقف N لأنها يمكن التحرك منها للموقف 2. وهنا يمكننا أن نرى أن 7 يجب أن تكون موقف P حيث أن الحركة الوحيدة من 7 هي إلى 6 أو 4 أو 3 والتي هي جميعا مواقف N.

وهكذا نستمر فنلاحظ أن 8 و 10 و 11 مواقف N و 9 موقف P أيضا 12 و 13 هي مواقف N و 14 موقف P وهكذا عن طريق الإستقراء نجد مجموعة المواقف P هي $P = \{0,2,7,9,14,16,...\}$ وهو مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تترك بواقي 0 او 2 عند قسمتها بـ 7. مجموعة مواقف N هي المجموعة المكملة أي $N = \{1,3,4,5,6,8,10,11,12,13,15,...\}$ وتمثل كالتالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14...
position	P	N	P	N	N	N	N	P	N	P	N	N	N	N	P...

نلاحظ أن النمط $P\,N\,P\,N\,N\,N\,N$ ذا الطول 7 يتكرر إلى الأبد.

من يكسب المباراة ذات 100 كرة اللاعب الأول أو الثاني؟

المواقف P هي المواقف ذات الأرقام المساوية 0 أو 2 مقياس 7 (*Modulus* 7). وبما أن 100 تعطى باقي 2 عند قسمتها بـ 7 فإن 100 هو موقف P فاللاعب الثاني يمكنه كسب المباراة.

<u>تمارين:</u>

1- الشكل المزيري *Misere Version* للمباريات التوافقية النزيهة هو في أن آخر من يتحرك يخسر المباراة. كرر الامثلة السابقة تحت هذه القاعدة.

2- للمثال الأخير لتكن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

أ - ماهي الإستراجية الرابحة؟.

ب - ماهي مجموعة المواقف P؟

ج - إذا كان يوجد بالكومة 31 كرة فما هي حركتك الرابحة إذا وجدت؟

3- صندوقين يحوي الأول m كرة والآخر n كرة ونرمز لهذا الموقف (m,n) حيث $m > 0$ و $n > 0$. يتناوب اللاعبين بالتحرك. الحركة تتكون من تفريغ واحد من الصندوقين ثم تقسيم محتويات الآخر بين الصندوقين على أن يكون هناك على الأقل كرة واحدة في كل صندوق. يوجد موقف نهائي واحد هو $(1,1)$. آخر لاعب يتحرك يكسب المباراة. أوجد جميع المواقف P.

4- أوجد جميع المواقف P للمباريات الخصمية بمجاميع خصمية:

(أ) $S = \{1,3,5,7\}$.

(ب) $S = \{1,3,6\}$.

(ج) من سيربح المباريات السابقة لوكانت الكومة تحوي 100 كرة؟

مباراة نم *The Game of Nim*:

وهي من أشهر مباريات الإزاحة وتلعب كالتالي:

1- يوجد 3 كومات من الكرات تحوي x_1 و x_2 و x_3 من الكرات على التوالي (كومات ذات أحجام 5 و 7 و 9 تعطي مباراة جيدة).

2- لاعبين إثنين يتناوبا التحرك.

3- كل حركة تتكون من إختيار كومة واحدة و إزاحة كرات منها. ولايمكن إزاحة كرات من أكثر من كومة واحدة في أي حركة وفي أي حركة يمكنك إزاحة كرة أو أكثر أو جميع الكرات الموجودة في الكومة الواحدة.

4- اللاعب الرابح هو الذي يزيح آخر كرة من الكومات الثلاثة.

ملاحظة: يمكنك لعب هذه المباراة على الإنترنت في أحد المواقع

http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html

http://www.dotsphinx.com/nim/

<u>تحليل أولي للمباراة:</u>

يوجد موقف نهائي واحد فقط وهو $(0,0,0)$ وبهذا يكون موقف P . (حل مباراة نم بكومة واحدة سهل جدا وتافه: ببساطة أزح جميع الكرات من الكومة مرة واحدة). أي موقف يحوي بالتمام واحدة كومة غير خالية مثل $(0,0,x)$ حيث $x>0$ يكون موقف N . لننظر لمباراة بكومتين فمن السهل ملاحظة أن المواقف P هي تلك التي يكون في كل كومة عدد متساوي من الكرات أي $(0,1,1)$ و $(0,2,2)$ و الخ وهذا لأن لو كان دور المنافس للتحرك من مثل هذا الموقف فيجب عليه التغيير إلى موقف تكون فيه الكومتين تحوي على عدد غير متساوي من الكرات وعندها يمكن العودة حالا إلى موقف تكون فيه الكومتين تحوي على عدد متساوي من الكرات.

إذا كانت جميع الثلاثة كومات غير خالية فإن الوضع يكون أكثر تعقيدا. من الواضح أن $(1,1,1)$ و $(1,1,2)$ و $(1,1,3)$ و $(1,2,2)$ جميعها مواقف N لأنه يمكن تحريكها إلى $(1,1,0)$ أو $(0,2,2)$ الوضع الأسهل التالي هو $(1,2,3)$ والذي يجب أن يكون موقف P وذلك لأنه يمكن التحرك إلى أحد المواقف N السابقة. ولو استمررنا على هذا المنطق سنجد أن ابسط مواقف P التالية هي $(1,4,5)$ و $(2,4,6)$ ولكن من الصعب أن نرى كيفية تعميم هذه الطريقة هل $(5,7,9)$ موقف P وهل $(15,23,30)$ موقف P أيضا؟

ربما لو استمرينا على هذا المنوال لأكتشفنا نمط ولكن سوف نستخدم التعريف التالي لإيجاد حل.

مجموع نم *Nim Sum*:

مجموع نم لعددين صحيحين غير سالبين هو مجموعهم بدون حمل ***without carry*** في الأساس 2.

توضيح: كل عدد صحيح غير سالب x له تمثيل وحيد في الأساس 2 من الشكل

$$x = x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + x_1 2^1 + x_0$$

لقيمة معينة m. حيث كل من x_i إما صفر أو 1. سوف نستخدم الترميز $\left(x_m x_{m-1} \ldots x_1 x_0\right)_2$ للتمثيل السابق أي قيمة x في التمثيل الثنائي. فمثلا

$$22 = 1\times 16 + 0\times 8 + 1\times 4 + 1\times 2 + 0\times 1 = \left(10110\right)_2$$

نوجد مجموع نم لعددين صحيحين وذلك بتمثيل العدين للأساس 2 ثم إستخدام الجمع بمقياس 2 على المركبات المفردة لكل منها:

تعريف: مجموع نم لكل من $\left(x_m \cdots x_0\right)_2$ و $\left(y_m \cdots y_0\right)_2$ هو $\left(z_m \cdots z_0\right)_2$ ونكتب

$$\left(x_m \cdots x_0\right)_2 \oplus \left(y_m \cdots y_0\right)_2 = \left(z_m \cdots z_0\right)_2$$

حيث لجميع قيم k

$$z_k = x_k + y_k \pmod 2$$

أي

$$z_k = \begin{cases} 1, & x_k + y_k = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

فمثلا:

$$\left(10110\right)_2 \oplus \left(110011\right)_2 = \left(100101\right)_2$$

وهذا يعني أن $37 = 51 \oplus 22$ ويمكن ان نشاهد هذا بشكل أوضح كالتالي

$$\begin{array}{rl} 22 = & 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0_2 \\ 51 = & 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1_2 \\ \hline nim\quad sum = & 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1_2 = 37 \end{array}$$

ملاحظة:

المجموع بدون حمل في الأساس 2

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
sum	0	1	1	0

$(x\,(xor)\,y \Rightarrow x \oplus y$ أي $)$

نظرية:

الموقف (x_1, x_2, x_3) في مباراة نم يكون موقف P إذا وفقط إذا كان مجموع نم لمركباته مساويا للصفر أي $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 0$.

فمثلا لنأخذ الموقف $(x_1, x_2, x_3) = (13,12,8)$ هل هذا موقف P؟ وإذا لم يكن فما هو الموقف الرابح؟

نحسب مجموع نم للأرقام 13 و 12 و 8 :

$$\begin{array}{rl} 13 = & 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ 12 = & 1\ 1\ 0\ 0_2 \\ 8 = & 1\ 0\ 0\ 0_2 \\ \hline nim\quad sum = & 1\ 0\ 0\ 1_2 = 9 \end{array}$$

وبما أن مجموع نم ليس صفرا فيكون هذا موقف N حسب النظرية.

هل في إمكانك إيجاد موقف رابح؟ يجب أن تجد حركة إلى موقف P أي إلى موقف بعدد زوجي من 1 في كل عامود. فمثلا يمكننا أخذ 9 كرات من الكومة 13 تاركين 4 كرات فتكون النتيجة موقف له مجموع نم مساوي الصفر:

$$\begin{array}{rcccc} 4 = & & 1 & 0 & 0_2 \\ 12 = & 1 & 1 & 0 & 0_2 \\ 8 = & 1 & 0 & 0 & 0_2 \\ \hline nim\ \ sum = & 0 & 0 & 0 & 0_2 \end{array} = 0$$

موقف رابح آخر هو أخذ 7 كرات من الكومة 12 تاركين 5 تترك كتمرين للتحقق منها. توجد حركة رابحة ثالثة هل يمكنك إيجادها؟

نم مع عدد كبير من الكومات:

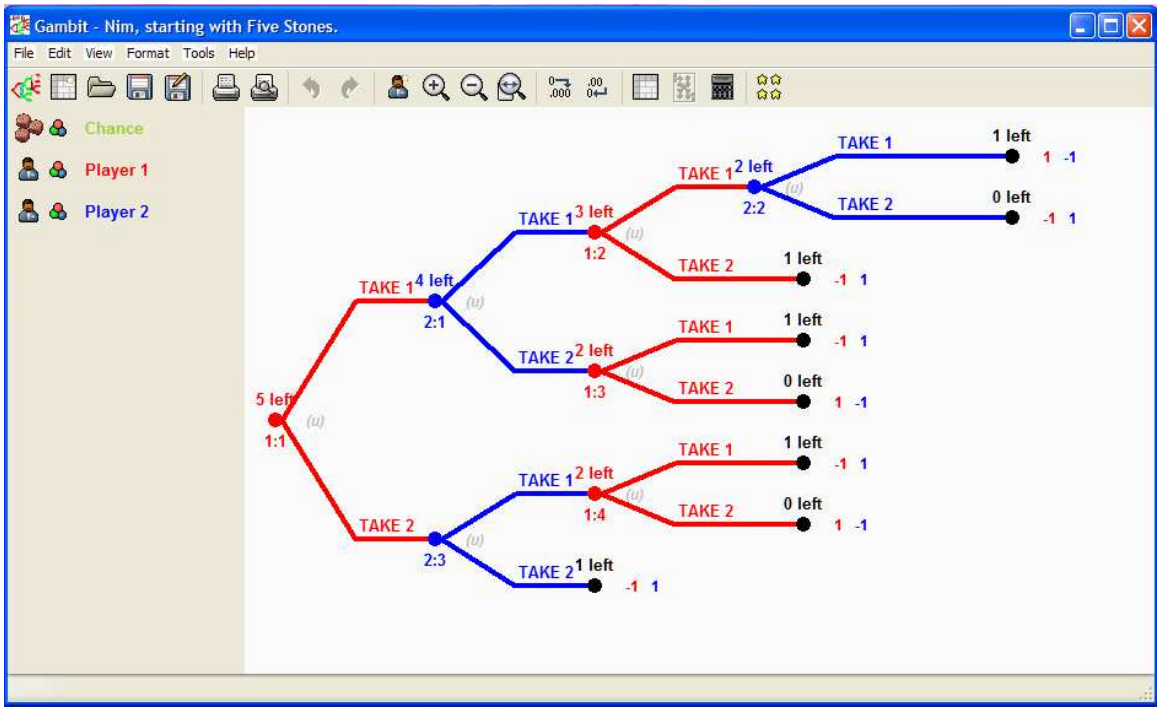
رأينا أن مباراة نم بكومة واحدة حلها تافه و بكومتين سهلة وحيث أن مباراة 3 كومات أكثر تعقيدا فلربما نتوقع أن مباراة بـ 4 كومات سوف تكون أكثر صعوبة. لحسن الحظ أن النظرية السابقة تنطبق على مباريات ذات عدد كبير من الكومات فالموقف (x_1, x_2, x_3, x_4) يكون موقف P إذا وفقط إذا كان $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0$.

(برهان النظرية لأي عدد إختياري محدود من الكومات يوجد لم يريد من الطلاب معرفته).

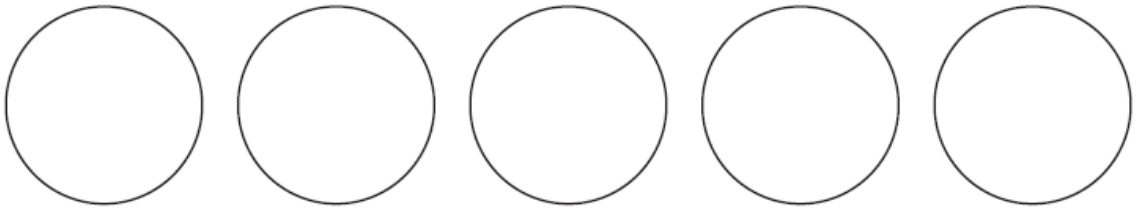
ملاحظة: في مباريات نم عدد الحركات الرابحة من موقف N يساوي لعدد الواحد (الرقم 1) في العامود الأقصى يسارا والذي يحوي عدد فردي من الواحد (الرقم 1). وبالذات يوجد عدد فردي من الحركات الرابحة.

مثال بإستخدام *Gambit*:

مباراة بين لاعبين. تبدأ المباراة بوضع 5 كرات على المنضدة. اللاعب الأول يمكنه سحب كرة أو كرتين في اي دور له وكذلك اللاعب الثاني حين يأتي دوره. اللاعب الذي يلتقط الكرة الأخيرة او الكرتين الإثنتين الأخيرة يكسب المباراة.



يمكنك لعب هذه المباراة مع زميل بإستخدام الشكل التالي:



تمارين:

1- ماهو مجموع نم للأعداد 27 و 17؟

2- مجموع نم للأعداد 38 و x هو 25 أوجد x؟

3- أوجد جميع الحركات الرابحة في مباريات نم التالية:

أ) 3 أكوام بكرات 12 و 19 و 27.

ب) 4 كومات بكرات 13 و 17 و 19 و 23.

ج) ماهي الإجابات للفقرات (أ) و (ب) إذا أستخدمنا الشكل المزيري؟

ملاحظة: ***الشكل المزيري Misere Version*** للمباريات التوافقية النزيهة هو في أن آخر من يتحرك يخسر المباراة.

4- المواقع التالية تحوي أشكال مختلفة من مباريات نم قم بزيارتها وحاول الفوز فيها:

http://www.chlond.demon.co.uk/Coins.html

http://www.chlond.demon.co.uk/Northcott.html

http://www.math.ucla.edu/~tom/Games/Moore.htm

نظرية المنفعة *Utility Theory*:

الطريقة التي يستخدمها شخص واعي (منطقي أو متعقل) في الإختيار بين تصرفين بديلين a_1 و a_2 غالبا ماتكون معقدة. في الحالات العامة يكون المدفوع في إختيار تصرف ما غير عددي بالضرورة ولكن قد يمثل كينونة معقدة مثل " تتحصل على بطاقة دخول لمباراة لفريقك المفضل" مثل هذه الكينونة نسميها مدفوع أو جائزة. الشخص الواعي في إختياره بين تصرفين يقدر قيم المدفوعات المختلفة ويوزنها بإحتمالات والتي يعتقد أنها ستؤدي للحصول على المدفوعات وغالبا ما يقوم بهذا بطريقة عفوية.

سوف نستعرض هنا نموذج رياضي والذي نستطيع بواسطته الإختيار بين تصرفات مختلفة. هذا النموذج يعتمد على أن هذا الشخص الواعي يستطيع التعبير عن أفضلياته *Preferences* بين المدفوعات بطريقة متناسقة *Consistent* مع فرضيات معينة.

والنتيجة الأساسية هي أن "القيمة" العائدة لهذا الشخص من المدفوعات يمكن أن تمثل كدالة عددية تسمى منفعة *Utility* معرفة على مجموعة المدفوعات وأن الأفضلية بين الإختيارات العشوائية تعطيه توزيع إحتمالي للمدفوعات والذي يعتمد فقط على القيمة المتوقعة للمنفعة لتلك الإختيارات العشوائية.

لتكن $\boldsymbol{P}$ مجموعة مدفوعات المباراة و $P_1, P_2, \ldots$ المدفوعات أي عناصر $\boldsymbol{P}$.

تعريف:

علاقة أفضلية *Preference relation* على $\boldsymbol{P}$ أو ببساطة أفضلية على $\boldsymbol{P}$ هي ترتيب خطي (ضعيف) بحيث:

1- (الخطية *Linearity*) إذا كان P_1 و P_2 في $\boldsymbol{P}$ عندئذ إما $P_1 \preceq P_2$ أو $P_2 \preceq P_1$ (او كليهما).

2- (التعدية *Transitivity*) إذا كان P_1 و P_2 و P_3 في $\boldsymbol{P}$ وكان $P_1 \preceq P_2$ و $P_2 \preceq P_3$ عندئذ $P_1 \preceq P_3$. إذا كان $P_1 \preceq P_2$ و $P_2 \preceq P_1$ عندئذ يقال أن P_1 و P_2 متكافئة *Equivalent* ويكتب $P_1 \simeq P_2$.

سوف نفترض أن الشخص الواعي يستطيع التعبير عن أفضلياته على المجموعة $\boldsymbol{P}$ بطريقة متناسقة مع علاقة أفضلية. إذا كان $P_1 \preceq P_2$ و $P_1 \not\simeq P_2$ فيقال أن هذا الشخص الواعي يفضل P_2 على P_1 ونكتب هذا $P_1 \prec P_2$. إذا كان $P_1 \simeq P_2$ يقال أنه غير مكترث *Indifferent* (ليس له تفضيل) بين P_1 و P_2 التعبير $P_1 \preceq P_2$ يعني إما أنه يفضل P_2 على P_1 أو انه لايفضل بينهما.

لسوء الحظ مجرد معرفة أن الشخص يفضل P_2 على P_1 لايعطى أي مؤشر على مقدار تفضيله للخيار P_2 على P_1. في الحقيقة يجب توضيح نقطة مقارنة أخرى مثل التعبير عن أفضلياته على جميع فضاء النصيب (إمكانيات) *Lottery* على المدفوعات.

<u>تعريف:</u>

النصيب *Lottery* هو توزيع إحتمالي محدود على مجموعة المدفوعات $\boldsymbol{P}$. ونرمز لمجموعة النصيب بـ $\boldsymbol{P^*}$.

إذا كانت P_1 و P_2 و P_3 مدفوعات فالتوزيع الإحتمالي p والذي يختار P_1 بإحتمال 1/2 و P_2 بإحتمال 1/4 و P_3 بإحتمال 1/4 يكون نصيب. سوف نستخدم الرموز p_1 و p_2 و p_3 الخ لعناصر المجموعة $\boldsymbol{P^*}$.

نلاحظ أن إذا كان p_1 و p_2 أنصبة و $0 \le \lambda \le 1$ فإن $\lambda p_1 + (1-\lambda) p_2$ نصيب أيضا بمعنى أن نصيب من الأنصبة هو نصيب أيضا.

سوف نفترض الآن أن الشخص الواعي له علاقة تفضيل ليس فقط على $\boldsymbol{P}$ ولكن على $\boldsymbol{P^*}$ أيضا.

أحد الطرق البسيطة لإنشاء أفضليات على ***P*** هو من خلال دالة المنفعة *Utility Function*.

<u>تعريف:</u>

دالة المنفعة *Utility Function* هي دالة حقيقية معرفة على ***P*** . أي $u : P \to \mathbb{R}$.

معطى دالة منفعة $u(P)$ فإننا نمدد نطاق *Domain* الدالة u إلى المجموعة ***P**** لكل الأنصبة بتعريف $u(p)$ لجميع $p \in$ ***P**** على انها المنفعة المتوقعة أي إذا كانت $p \in$ ***P**** النصيب الذي يختار $P_1, P_2, ..., P_k$ بإحتمالات لكل منها $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ حيث $\lambda_i \geq 0$ و $\sum \lambda_i = 1$ عندئذ

$$u(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u(P_i) \qquad (1)$$

هو المنفعة المتوقعة للمدفوع للنصيب p. وهكذا معطى دالة منفعة u فإن تفضيل بسيط معرف على ***P**** يعطى بالعلاقة:

$$p_1 \preceq p_2$$

إذا وفقط إذا

$$u(p_1) \leq u(p_2)$$

أي

$$p_1 \preceq p_2 \Leftrightarrow u(p_1) \leq u(p_2) \qquad (2)$$

أي أن النصيب ذا أعلى منفعة متوقعة هو المفضل. والعكس لو اعطينا علاقة أفضلية $\preceq$ على ***P**** فهل توجد دالة منفعة u معرفة على ***P*** بحيث تصبح العلاقة (2) صحيحة؟

تحت الفرضين التاليين يكون الجواب نعم:

A1: إذا كان p_1 و p_2 و q في ***P**** و $0 \leq \lambda \leq 1$ عندئذ

$$p_1 \preceq p_2 \Leftrightarrow \lambda p_1 + (1-\lambda) q \preceq \lambda p_2 + (1-\lambda) q \qquad (3)$$

A2: لقيم إختيارية p_1 و p_2 و q في ***P**

$$p_1 \prec p_2 \Rightarrow \quad \exists \lambda > 0 : p_1 \prec \lambda q + (1-\lambda) p_2 \qquad (4)$$

وبالمثل

$$p_1 \prec p_2 \Rightarrow \quad \exists \lambda > 0 : \lambda q + (1-\lambda) p_1 \prec p_2 \qquad (5)$$

الفرضية *A1* تعني: لو لدينا عملة لها إحتمال λ في ظهور الصورة فإذا رميت وظهرت الكتابة فلك q أما إذا ظهرت الصورة فلك أن تختار بين p_1 و p_2. إذا كنت تفضل p_2 فإن بالطبع ستختارها. هذه الفرضية تقول انك لو قررت بين p_1 و p_2 قبل أن تعلم نتيجة الرمية فإنك ستتخذ نفس القرار.

الفرضية *A2* والتي تسمى فرضية الإستمرار *Continuity Axiom* فالعلاقة (4) تقول إذا كانت $p_1 \prec \lambda q + (1-\lambda) p_2$ عندما $\lambda = 0$ فإنها صحيحة لقيم λ قريبة بشكل كافي من الصفر. فالفرضية A2 تفترض ضمنيا أنه لايوجد مدفوع يكون بشكل كبير جدا أقل رغبة أو بشكل كبير جدا أكثر رغبة من أي مدفوع آخر.

<u>نظرية:</u>

إذا كان هناك علاقة أفضلية $\preceq$ على ***P** تحقق الفرضيتين A1 و A2 فعندئذ توجد دالة منفعة u معرفة على ***P** وتحقق العلاقة (2). أيضا تتحدد u بشكل وحيد *unique* ماعدى لإختلاف في الموضع *location* والقياس *scale*.

إذا كانت $u(P)$ تحقق (2) فعندئذ لعددين حقيقين a و $b > 0$ دالة المنفعة

$$\tilde{u}(P) = a + b\, u(P)$$

أيضا تحقق العلاقة (2). إذا يمكن إيجاد u بشكل وحيد ماعدى لتغيير فقط في الموضع والقياس.

نستنتج من النظرية أن إذا كان لشخص علاقة تفضيل على ***P** والتي تحقق الفرضيات 1 و 2 فإن هذا الشخص يتصرف كأن أفضليته تعتمد على منفعة معرفة على ***P** وأن من

بين الأنصبة الإثنين فإنه يفضل النصيب الذي يعطي أكبر منفعة متوقعة. في الحياة العملية أي شخص في الحقيقة لا يفكر من خلال دالة منفعة ولايشعر بوجودها ولكن دالة منفعة مرتبطة بأفضلياته يمكن إستنباطها تقريبا بواسطة مجموعة من الأسئلة.

نظرية : (نظرية المنفعة Utility Theory)

أي دالة منفعة يجب أن تحقق التالي:

(1) $u(p_1) \le u(p_2) \Leftrightarrow \quad p_1 \preceq p_2$

(2) $u\left(\lambda p_1 + (1-\lambda) p_2\right) = \lambda u(p_1) + (1-\lambda) u(p_2)$

أي دالة $\tilde{u}(P) = a + b\,u(P)$ أيضا تحقق الشروط (1) و (2).

عودة لمثال : حيرة المساجين *Prisoner's Dilemma*

تقوم الشرطة بالتحقيق مع إثنان من المشتبهين على إنفراد بدون علم احدهما بما يجري مع الآخر والذين قاموا بجريمة كبيرة. المشتبه بهما لديهم خيارين إما يعترفا أو ينكرا. إذا أنكر كليهما فسوف يسجنا بسبب جنحة سابقة بسيطة. إذا أعترف أحدهما فسوف يدانا كليهما بالسجن. حيرة السجناء تأتي من: إذا أعترف أحدهما وأنكر الآخر فإن المعترف يسجن مدة بسيطة لتعاونه مع الشرطة بينما الآخر يسجن مدة أطول. المصفوفة الثنائية للعائدات هي كما يلي:

Payoffs		*prisoner*2	
		deny	*confess*
*prisoner*1	*deny*	$-1,-1$	$-10,0$
	confess	$0,-10$	$-5,-5$

نرتب العائدات للسجين الأول من الأسوء للأفضل (نفس المبدأ ينطبق على السجين الثاني):

Payoffs: -10, -5, -1, 0

أسوأ نتيجة سجن 10 سنوات تعطى منفعة (إرتياح أو رضى *Satisfaction*) : 0

تتبعها سجن 5 سنوات تعطى منفعة (إرتياح): 5

ثم سجن 1 سنة تعطى منفعة (إرتياح): 10

ثم سجن 0 سنة تعطى منفعة (إرتياح): 15

ونلخصها في الجدول التالي:

Payoff	*Utility* (*Satisfaction*)	*Utility Function*
- 10	0	0
- 5	5	0.33
- 1	10	0.66
0	15	1

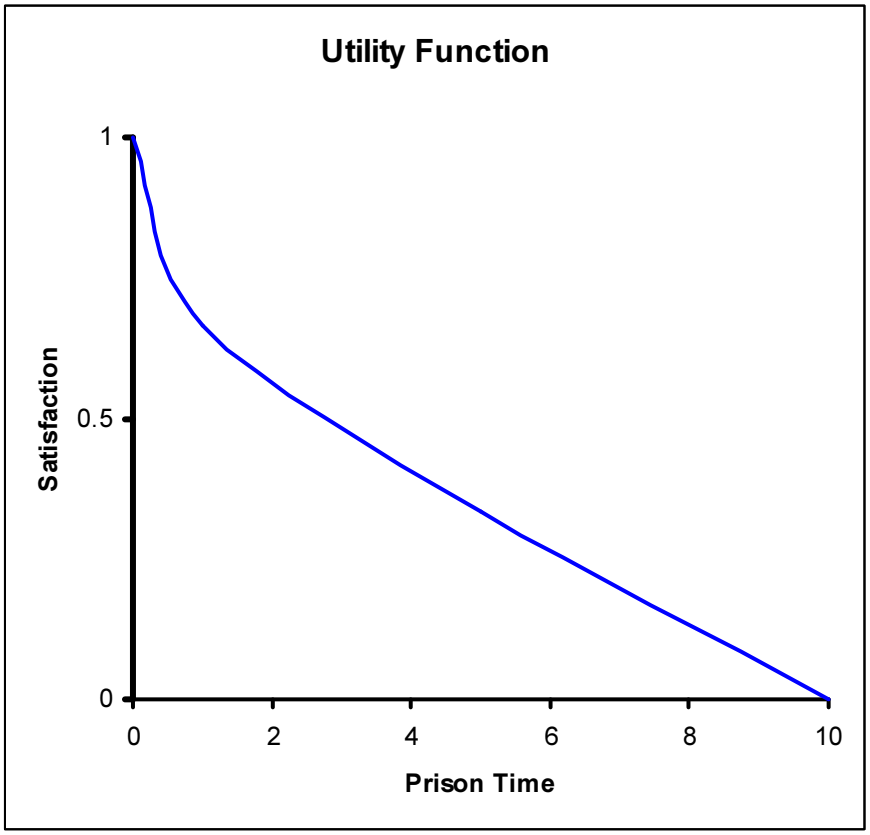
حيرة المساجين بدلالة المنفعة:

Utility		*prisoner*2	
		deny	*confess*
*prisoner*1	*deny*	10,10	0,15
	confess	15,0	5,5

أو بدلالة دالة المنفعة:

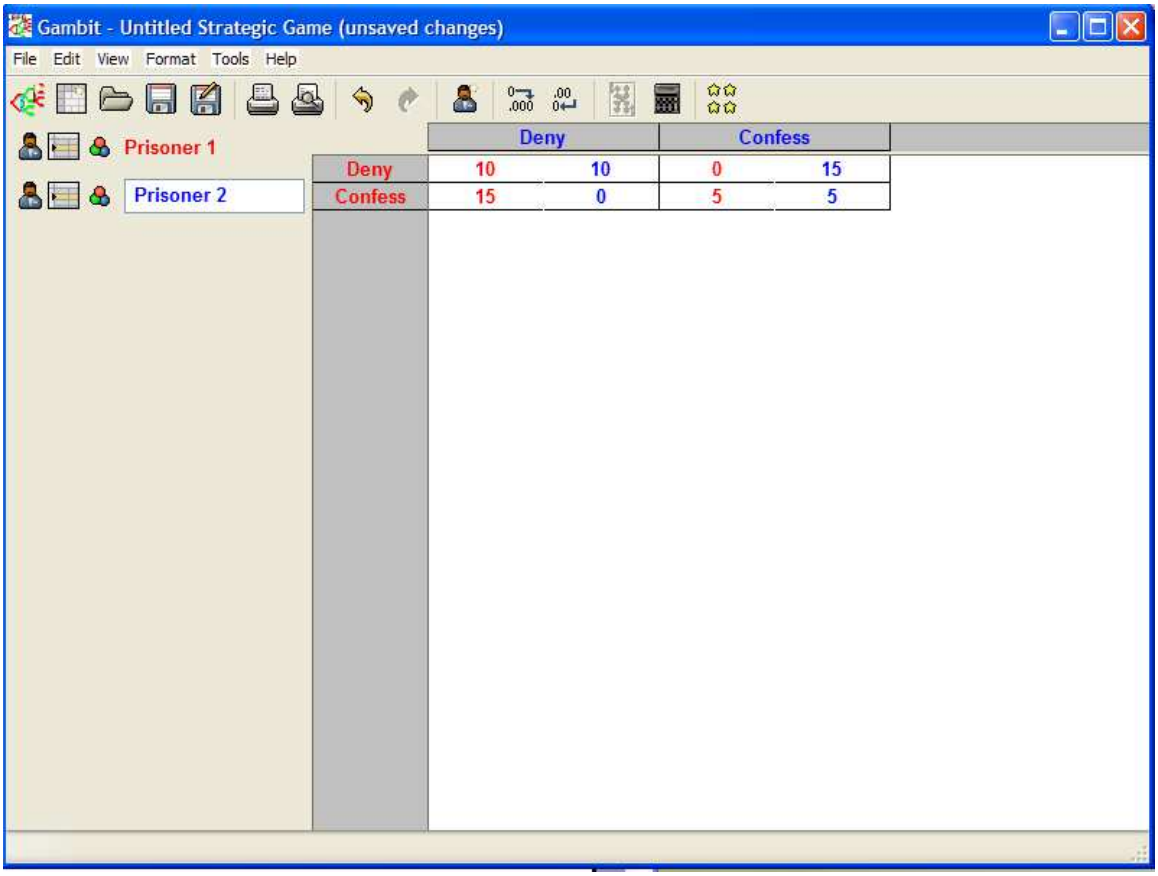
Utility Function		*prisoner*2	
		deny	*confess*
*prisoner*1	*deny*	0.66,0.66	0,1
	confess	1,0	0.33,0.33

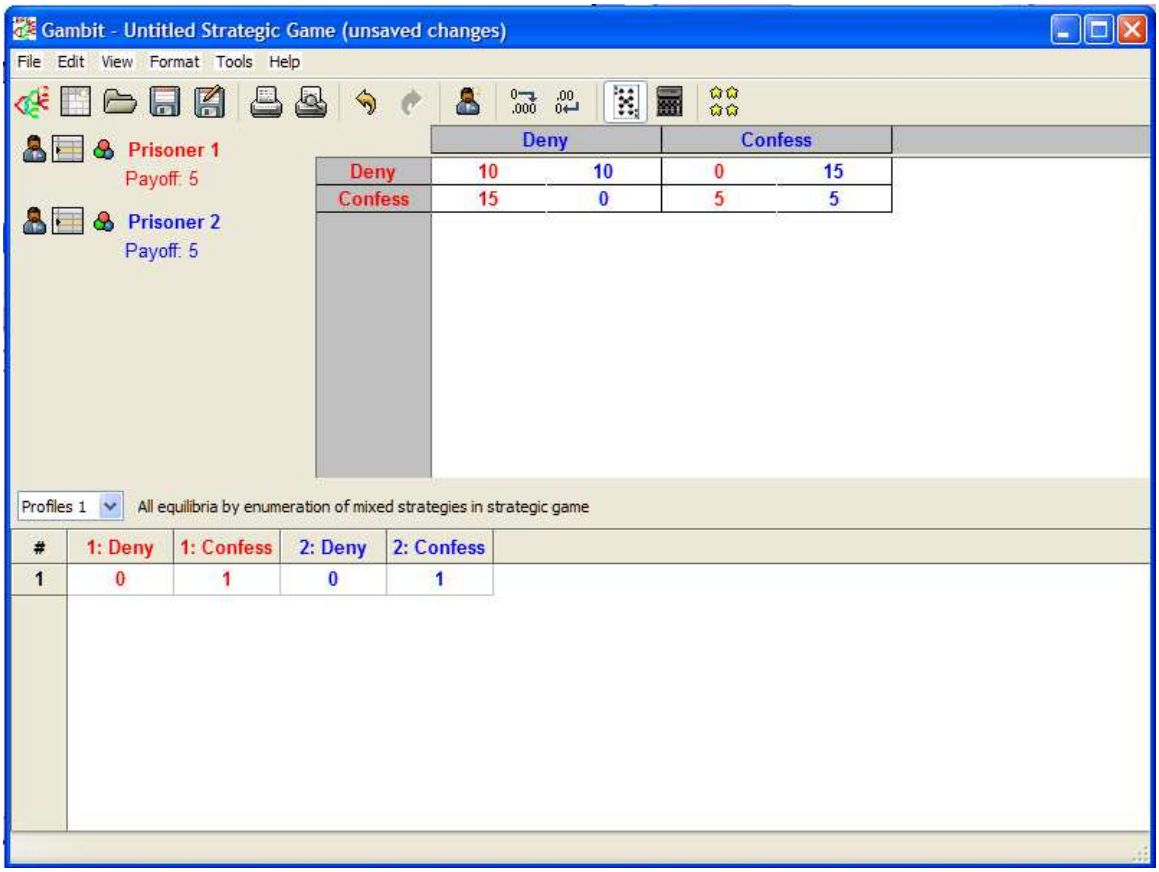
وترسم دالة المنفعة كالتالي:

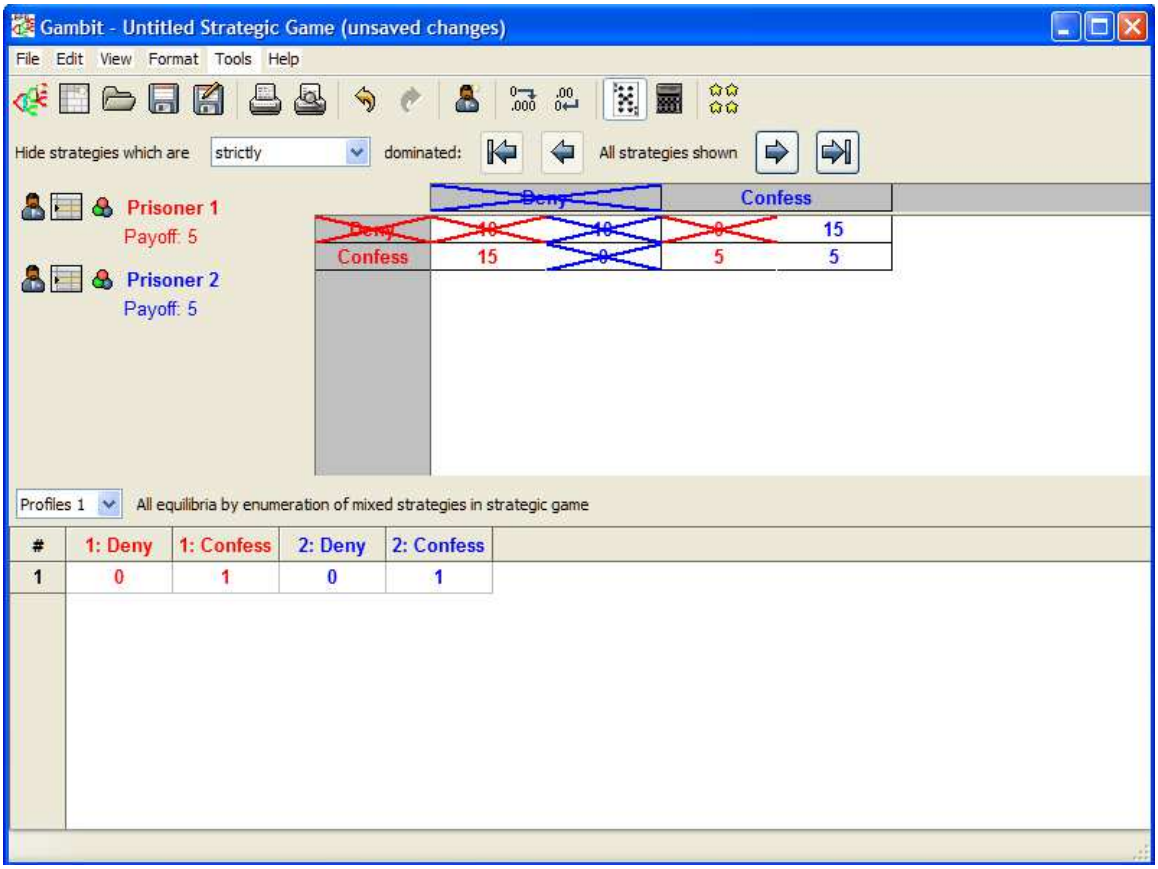


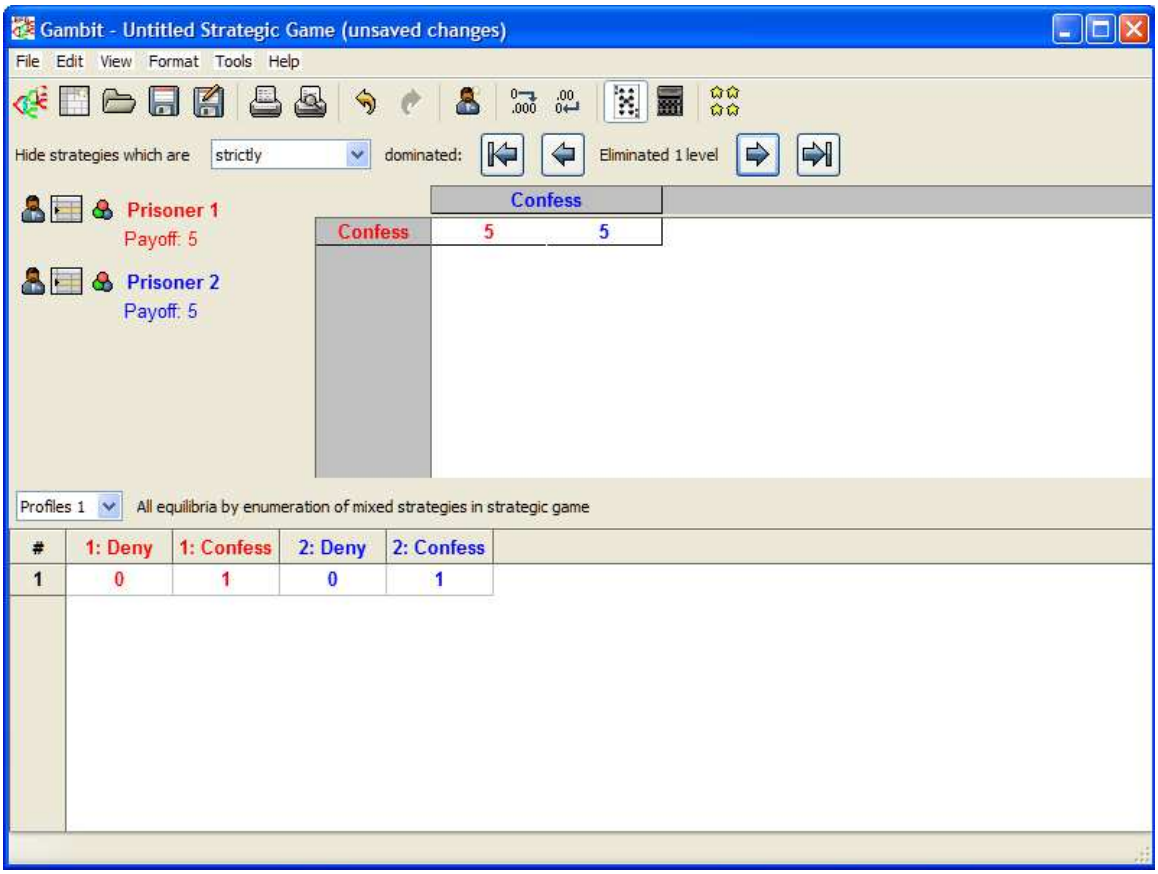
الحل بواسطة *Gambit*:

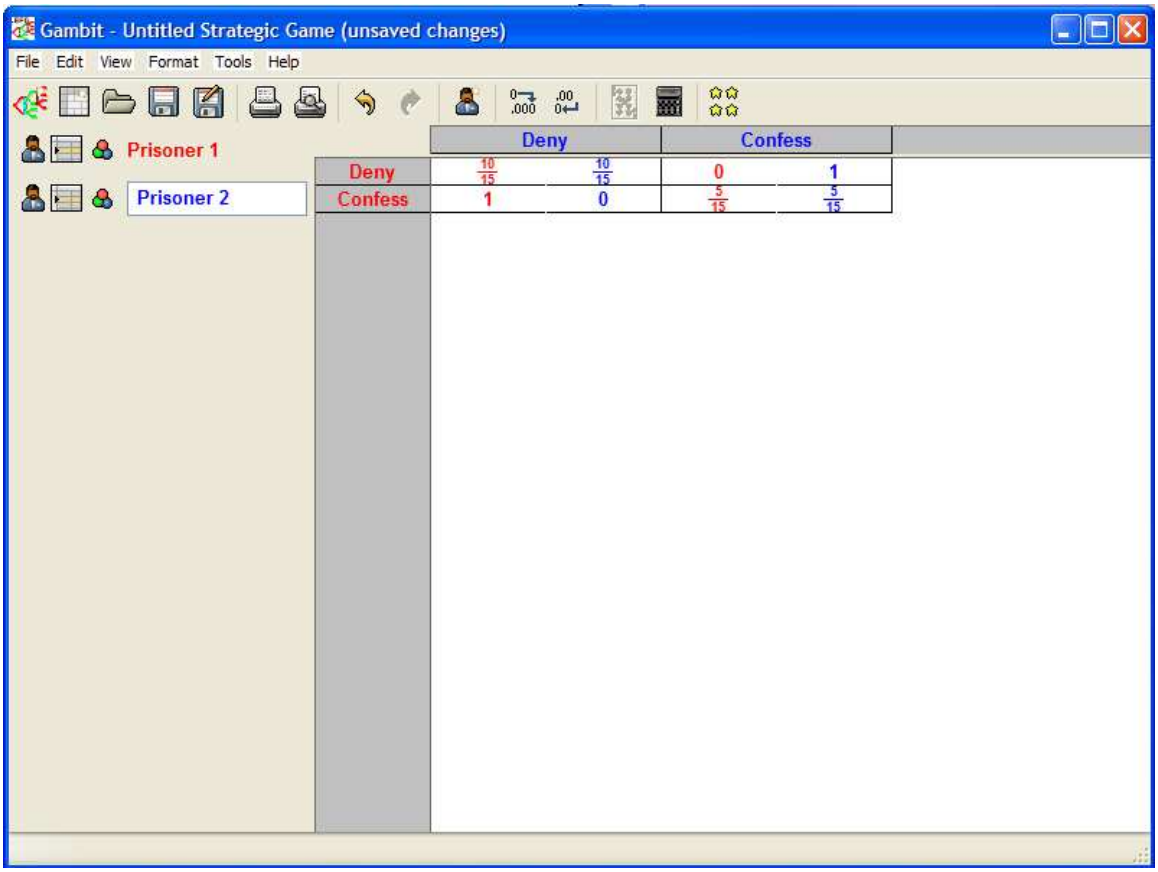
يحل بإستخدام قيم المنفعة أو قيم دالة المنفعة كالتالي:

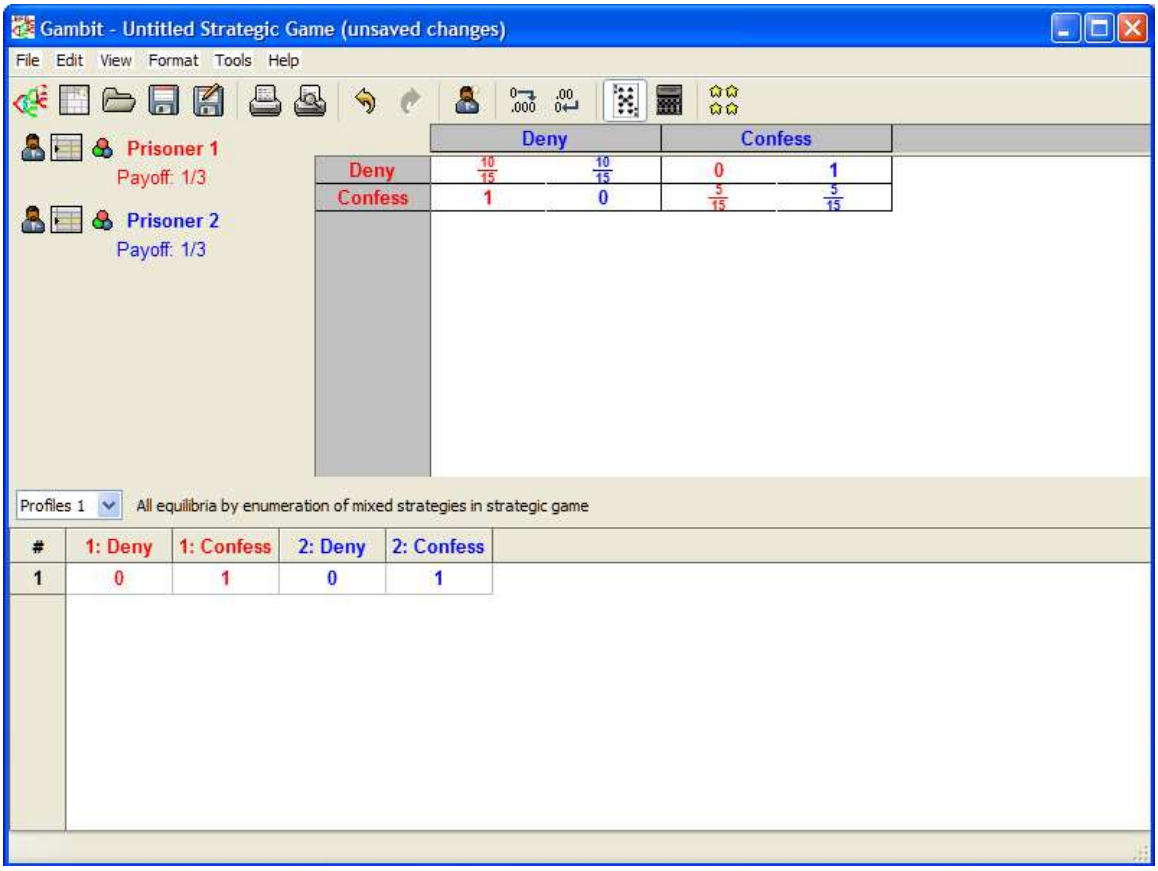

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Prisoner 1
Prisoner 2
Deny
Confess
Deny
Confess
10 10 0 15
15 0 5 5

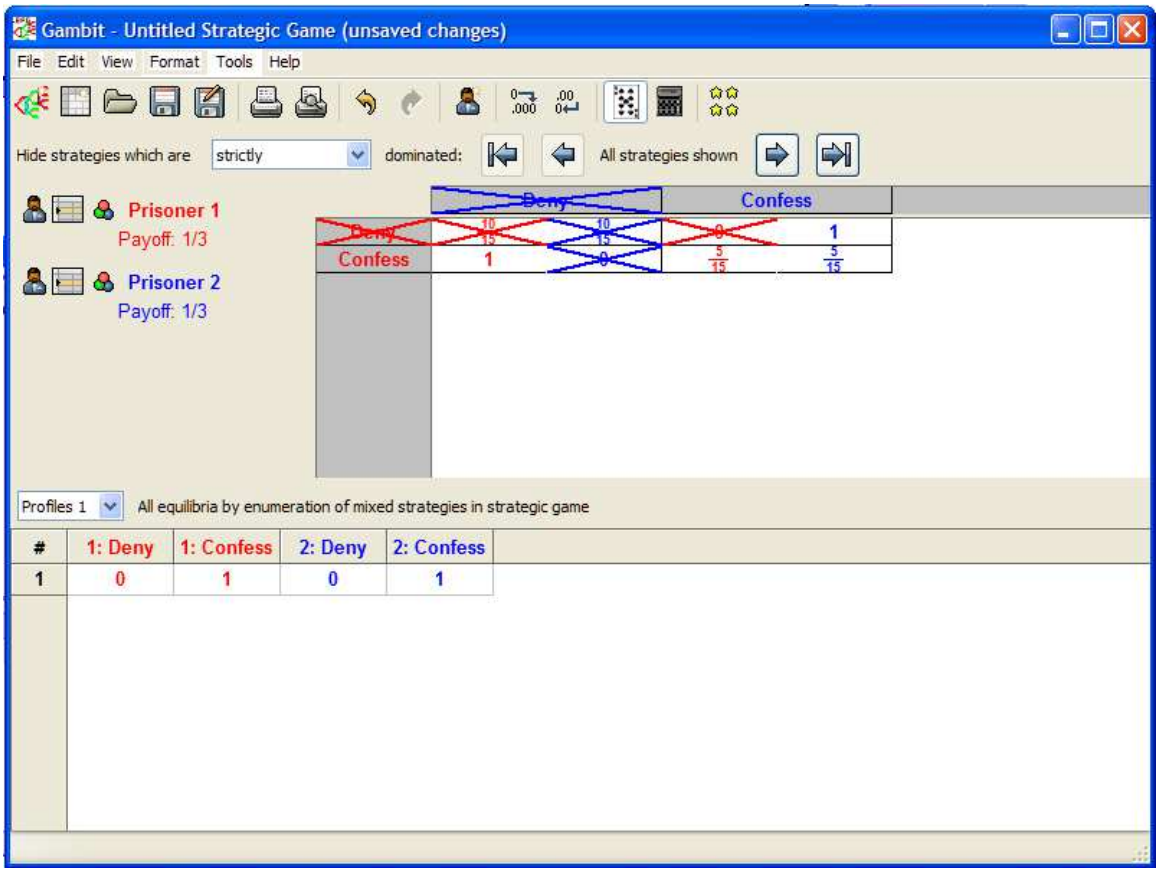

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Prisoner 1
Payoff: 5
Prisoner 2
Payoff: 5
Deny
Confess
Deny 10 10 0 15
Confess 15 0 5 5
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: Deny 1: Confess 2: Deny 2: Confess
1 0 1 0 1

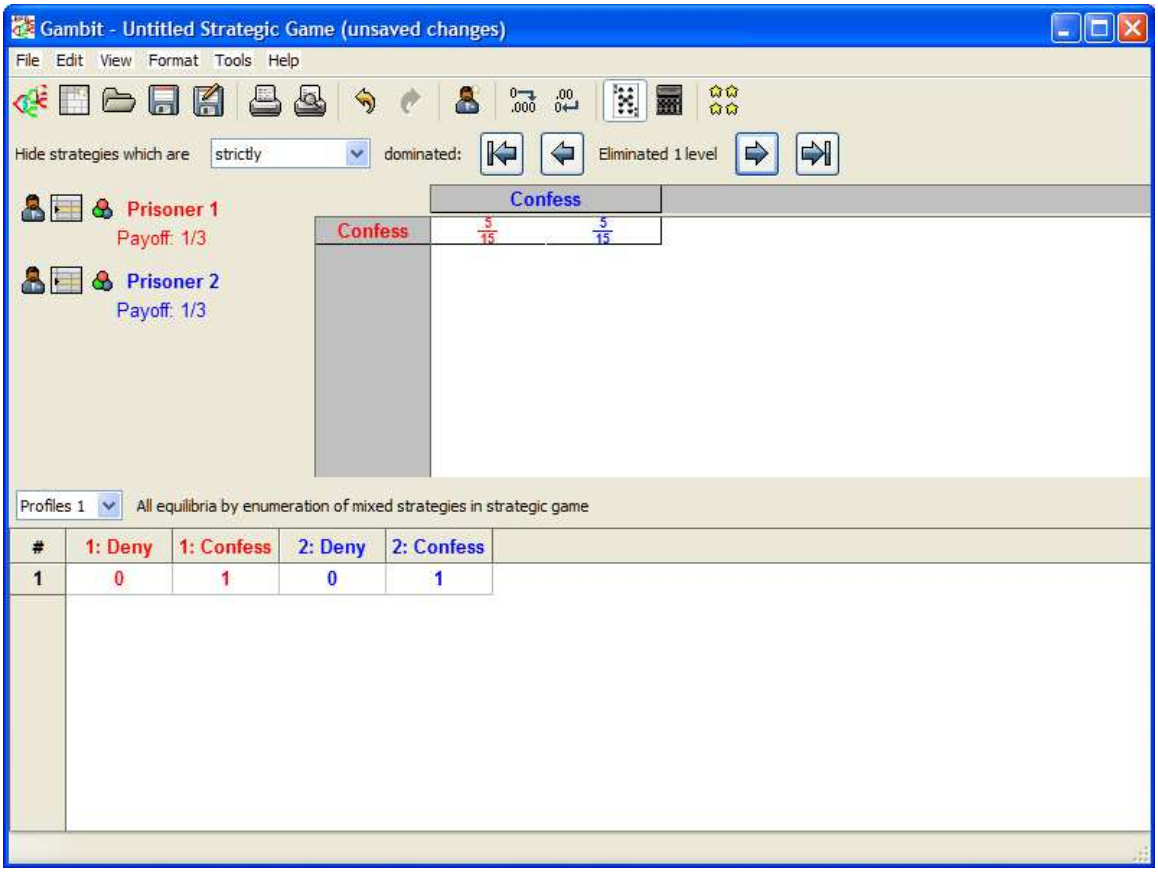

Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated:
All strategies shown
Prisoner 1
Payoff: 5
Prisoner 2
Payoff: 5
Deny
Confess
10 10 0 15
15 0 5 5
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: Deny 1: Confess 2: Deny 2: Confess
1 0 1 0 1


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated:
Eliminated 1 level
Prisoner 1
Payoff: 5
Prisoner 2
Payoff: 5
Confess
Confess 5 5
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: Deny 1: Confess 2: Deny 2: Confess
1 0 1 0 1


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Prisoner 1
Prisoner 2
Deny
Confess
Deny
Confess
10/15 10/15 0 1
1 0 5/15 5/15


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Prisoner 1
Payoff: 1/3
Prisoner 2
Payoff: 1/3
Deny
Confess
Deny
Confess
10/15 10/15 0 1
1 0 5/15 5/15
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: Deny 1: Confess 2: Deny 2: Confess
1 0 1 0 1


Gambit - Untitled Strategic Game (unsaved changes)
File Edit View Format Tools Help
Hide strategies which are strictly dominated:
All strategies shown
Prisoner 1
Payoff: 1/3
Prisoner 2
Payoff: 1/3
Deny
Confess
Deny
Confess
Profiles 1
All equilibria by enumeration of mixed strategies in strategic game
1: Deny 1: Confess 2: Deny 2: Confess
1 0 1 0 1



مثال آخر:

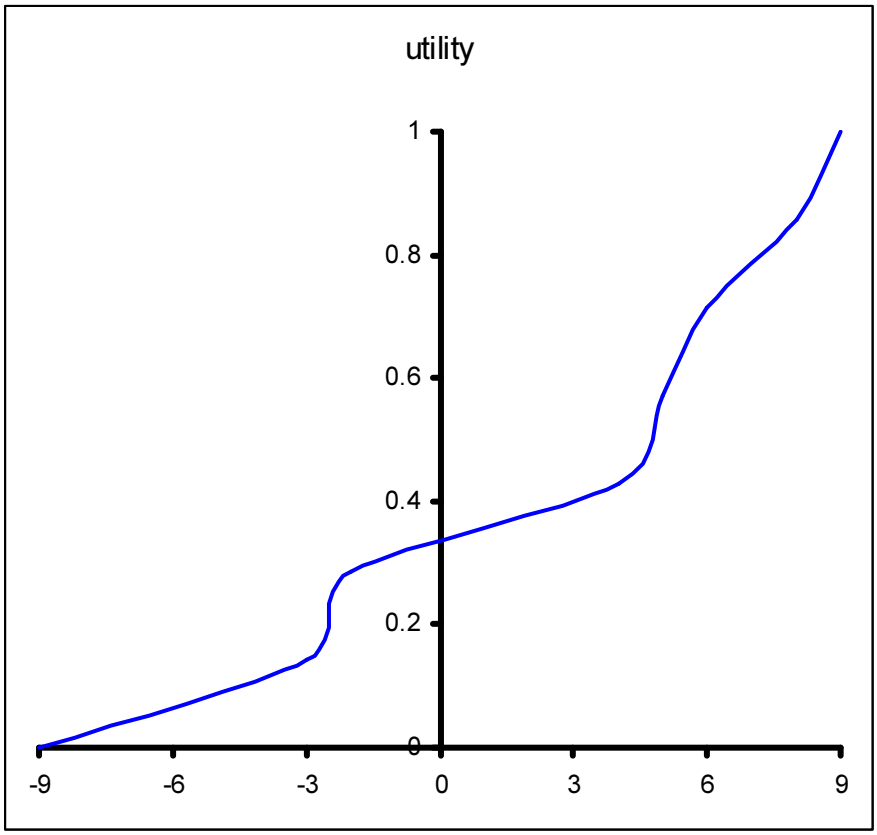
شركتين صناعة البان تنتج كل منهما نوع من اللبن. الشركة A تعلن بملصقات في الطرق A_1 وإعلانات تلفزيون A_2 وإعلانات صحف A_3 . الشركة B تعلن بملصقات في الطرق B_1 وإعلانات تلفزيون B_2 وإعلانات صحف B_3 بالإضافة إلى نشرات توزع على المنازل B_4. نتيجة لكل جهد إعلاني فإن أي شركة تكسب من الشركة الاخرى نسبة من السوق. مصفوفة المدفوعات التالية تعطي نسبة السوق للشركة A:

$$
\begin{array}{c} Payoff \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -2 & 9 & -3 \\ 6 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -9 & 5 \end{bmatrix} \end{array}
$$

لتحويل المدفوعات لمنفعة نكون الجدول التالي:

Payoffs	*Scale*	*Utility*
-9	0	0
-3	1	0.142857
-2	2	0.285714
4	3	0.428571
5	4	0.571429
6	5	0.714286
8	6	0.857143
9	7	1

$$
\begin{array}{c} Utility \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.857 & 0.286 & 1 & 0.143 \\ 0.714 & 0.571 & 0.714 & 0.857 \\ 0.286 & 0.429 & 0 & 0.571 \end{bmatrix} \end{array}
$$



تمرين:

1- تأكد أن دالة المنفعة تؤدي لنفس الحل السابق.

2- ثم أوجد الحل بواسطة *Gambit*.

3- أوجد الحل بواسطة SageMath.

تمارين:

أوجد دالة المنفعة لجميع الأمثلة السابقة.

تمارين:

أوجد الحل للتمارين التالية:

- بواسطة البرمجة الخطية مستخدما *Excel Solver*

- و *Gambit*.

- و SageMath.

1)

حدد حل نقطة السرج والإستراتيجيات البحتة التابعة له وقيمة المباراة ودالة المنفعة للمباريات التالية.

جدول المدفوعات للاعب A:

(a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

(b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	−4	−5	6
A_2	−3	−4	−9	−2
A_3	6	7	−8	−9
A_4	7	3	−9	5

2)

حل المباريات التالية و أوجد دالة المنفعة. جدول المدفوعات للاعب A:

(a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	9	6	0
A_2	2	3	8	4
A_3	−5	−2	10	−3
A_4	7	4	−2	−5

(a)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	9	6	8
A_2	−2	10	4	6
A_3	−5	3	0	7
A_4	7	−2	8	4

(c)

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	1
A_2	5	2	3
A_3	4	2	−5

(d)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	1	3
A_2	4	8	0	−6
A_3	6	−9	−2	4

3)

تقوم كلا من شركتين بالدعاية لمنتجين متنافسين. كلا من المنتجين يسيطر على 50% من السوق حاليا. وبسبب تحسينات حديثة في المنتجين كلا من الشركتين تجهز للقيام بحملة إعلانية. إذا لم تعلن كلا من الشركتين فسيبقى نسبة نصيب كلا منهما في السوق كما هو عليه. إذا قامت أحد الشركتين بحملة قوية فإن الأخرى ستخسر بالتأكيد جزء من

نسبة زبائنها في السوق. أظهرت دراسة تسويقية أن 50% من الزبائن المحتملين يمكن الوصول إليهم من خلال الإعلان التلفزيوني و 30% من إعلانات الجرائد و 20% من خلال نشرات توزع على المنازل.

شكل هذه المشكلة كمباراة بين لاعبين إثنين ذات مجموع صفري ومن ثم حدد أفضل إستراتيجية لكل لاعب و أوجد دالة المنفعة.

4)

يمكن لخالد والذي يستيقظ متأخرا التوجه بسيارته للجامعة مسرعا بأحد طريقين. الطريق السريع والذي يوجد به جهاز ساهر واحد بين منزل خالد والجامعة والذي يمكن ان يسجل عليه مخالفة 300 ريال بإحتمال 50% وهناك طريق أقصر بكثير من داخل الرياض و به 2 جهاز ساهر ونظرا للزحام فإن خالد قد يبطئ عند أحدهما أو كلاهما وبهذا يكون إحتمال تسجيل مخالفة 30% وبنفس القيمة لأي منهما (300 ريال).

ساعد خالد في وضع إستراجيات لكي يقلل خسائره.

5)

مصفوفة المدفوعات للاعب A تعطي بالمصفوفة التالية:

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	50	50
A_2	1	1	0.1
A_3	10	1	10

تأكد من أن إستراتيجيات A والتي هي $\left(\frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6}\right)$ وإستراتيجيات B والتي هي

$\left(\frac{49}{54},\ \frac{5}{54},\ 0\right)$ إستراجيات مثلى لكل منهما.

6)

حل المباراة و أوجد دالة المنفعة.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	−2	1	2
A_2	2	3	−3	0
A_3	−1	2	−2	2
A_4	−1	−2	4	1

(7

يقوم اللاعبين A و B باللعبة التالية : يختار A أحد الـرقمين 0 أو 1 دون أن يعلن عن اختياره ، ثم يقوم بعدها اللاعب B كذلك باختيار أحد الرقمين 0 أو 1 دون أن يعلن عن اختياره ، ثم يقوم A باختيار 0 أو 1 . فإذا كـان مجموعـة الأرقام الناتجة زوجياً فإن B يدفع لـ A قيمة هذا الناتج بالدولار و إلا فإن A يدفع لـ B (يعتبر 0 رقم زوجي) . المطلوب :

أ ـ رسم شجرة المباراة وتحديد مجموعات المعلومات إن وجدت .

ب ـ تحديد استرتيجيات كل من اللاعبين .

ج ـ إيجاد مصفوفة المباراة .

د ـ هل هذه المباراة ذات مجموع صفري أم لا ؟ .

(8

تتألف قوة عسكرية A من ثلاثة ألوية مدرعة تقوم بالدفاع عن المدينة C من خلال مدخلين (طريقين) رئيسيين للمدينة حيث يتوقع أن تتم مهاجمة المدينة من قوة ثانية معادية B عبر أحد هذين المدخلين أو كليهما . تتألف القوة B من لواءين ويمكنها مهاجمة المدينة C إما بلواء عبر كل مدخل رئيسي أو باللواءين عبر أحد المدخلين . يمكن للقوة المدافعة A أن تقوم بالدفاع عن أحد المدخلين أو لواءين للدفاع عن أحد المدخلين ولواء للدفاع عن المدخل الآخر . وتقتضي قواعد اللعبة العسكرية أن تحصل القوة A أو القوة B من المكاسب ما يساوي إلى الفرق بين عدد ألويتها وعدد الألوية الخصم . والمطلوب :

أ ــ رسم شجرة المباراة على أنها ذات مجموع صفري .

ب ــ إيجاد استراتيجيات كل من القوتين A و B .

جـ ــ إيجاد مصفوفة المباراة الناتجة .

د ــ هل هذه المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

(9

تتنافس شركتان لعرض منتجاتهما في اثنين من الأسواق الرئيسية في إحدى المدن ويتوقع أن يكون عدد الزبائن في السوق الأولى مساوياً 10000 وفي السوق الثانية 15000 ونتيجة للدراسة التي أجرتها كل من الشركتين فقد وجدتا ما يلي :

(I) إذا شاركتا في نفس السوق فيتوقع أن تبيع كل منهما بضاعتها إلى 40 % من الزبائن .

(II) إذا لم تشاركا بنفس السوق فيتوقع أن تبيع كل منهما بضاعتها إلى 75 % من الزبائن .

وتهدف كل شركة أن تجعل الفرق بين عدد زبائنها وزبائن الشركة الأخرى أكبر ما يمكن .

والمطلوب : إيجاد شجرة المباراة والاستراتيجيات والمصفوفة المقابلة للعبة المنافسة بين الشركتين . هل هذه المباراة ذات مجموع صفري ؟ . وهل هي ذات معلومات كاملة ؟ وضح إجابتك .

(10

تقوم شركتان بصناعة تلفزيونات ملونة وغير ملونة ، تستطيع الشركة الأولى صناعة إما 200 تلفزيون ملون في الأسبوع أو 200 تلفزيون غير ملون في الأسبوع. يقدر ربح كل وحدة بـ 30 $ لكل تلفزيون ملون و15 $ لكل تلفزيون غير ملون . تستطيع الشركة الثانية أن تصنع إما 200 تلفزيون ملون أو 400 تلفزيون غير ملون في الأسبوع . بستوعب السوق ما مقداره 200 تلفزيون ملون و 400 غير ملون ، ويتوقع أن تكون حصة كل من الشركتين بنسبة ما تنتجه كل منهما من كلال النوعين فمثلاً إذا أنتجت الأولى 200 تلفزيون ملون وأنتجت الأخرى 100 تلفزيون ملون فعندئذٍ تبيع الأولى $200\times\frac{200}{600}$ وتبيع الثانية $100\times\frac{200}{600}$. ارسم شجرة المباراة واكتب مصفوفتها .

(11

تتسابق شركتان A و B لتنفيذ أحد المشاريع . يبلغ معدل الضرائب القانوني السنوي للشركة A والخاصة بالمشروع $ 4000000 ، كما يبلغ معدل الضرائب السنوي للشركة B والخاصة بالمشروع $ 12000000 . ويمكن لكل من الشركتين أن تسلك أحد خيارين ، فإما أن توافق على المشروع وتدفع الضرائب المستحقة قانوناً أو أن تقوم بعملية تزوير لتبين أنه لا ضرائب مستحقة عليها . لكن مصلحة الضرائب يمكنها فقط أن تدقق مدخولات واحدة من الشركتين كل عام فإذا تمكنت هذه المصلحة من تدقيق مدخولات الشركة الكاذبة فإنها ستتمكن من كشف التزوير وستقوم الشركة الكاذبة عندئذٍ بدفع مستحقاتها من الضرائب مضافاً إليها غرامة تساوي نصف الضرائب المستحقة عليها قانوناً . أرسم شجرة المباراة للمشكلة وأوجد مصفوفتها .

(12

تحوي كل من علبتي كبريت عودين من الثقاب ، يقوم لاعبين A و B باللعبة التالية : يقوم اللاعب A بسحب عود أو عودين من الثقاب من واحدة فقط من العلبتين ، ثم يتبعه بعد ذلك اللاعب B . واللاعب الخاسر هو الذي يسحب العود (أو العودين) الأخير (الأخيرين) ومقدار خسارته هو أن يدفع $ 2 للاعب الآخر . والمطلوب :

1 ــ ارسم شجرة المباراة .

2 ــ حدد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ــ أوجد مصفوفة المباراة .

4 ــ هل المباراة ذات معلومات كاملة أم لا ؟ وضح إجابتك .

(13

توجد على طاولة بطاقتا لعب ، أحدهما تحمل رقم 1 (أس) والأخرى رقم 2 . يقوم كل من اللاعبين A و B بوضع $ 1 في وعاء ثم يقوم A بسحب إحدى البطاقتين دون النظر إليها وإعطائها إلى B . فينظر إليها B فإذا كانت أس فعلى B أن يقول أنها أس ، أما إذا كانت 2 فيمكن لـ B عندها أن يقول أس أو 2 فإذا قال 2 فإنه يخسر المباراة والـ $ 1 في الوعاء أما إذا قال أس فعليه وضع $ 1 آخر في الوعاء وعندها يمكن لـ A إما أن يصدق ما قاله B ويخسر الـ $ 1 الذي وضعه بداية في الوعاء أو أن يطلب رؤية البطاقة . فإذا كانت أس فإن B سيربح المبلغ المتجمع في الوعاء أما إذا كانت 2 فإن A سيربح هذا المبلغ . المطلوب :

1 ــ رسم شجرة المباراة .

2 ــ تحديد استراتيجيات كل من اللاعبين .

(14

يقوم لاعبين I و II بلعب اللعبة التالية : يقوم اللاعب I بسحب واحـــدة مـــن 3 أوراق اللعب هي الأس ، الملك أو الملكة (والذي سنرمز لها بـــ Q و K و A على الترتيب) بطريقة عشوائية وإعطائها للاعب II الذي يقوم بالنظر إليهـــا . فإذا كانت الأس (A) فإن على II أن يعلن عنها وإذا كانت الملك (K) فـــإن II يمكن أن يقول أس (A) أو ملك (K) ، أما إذا كانت الملكة فـــإن II يمكـــن أن يقول أنها أس (A) أو ملكة (Q) . فإذا قال II عن الورقة أنهـــا الأس فـــإن I يمكن أن يصدقه ويدفع له عندئذٍ 1$ أو أن يطلب رؤية الورقة وعندئذٍ إذا كانت الورقة هي الأس فإن I يدفع لـــ II مبلغ 2$ ، أما إذا كانت غير ذلـــك فـــإن II يدفع لـــ I مبلغ 2$. وإذا قال II أن الورقة المسحوبة هي الملك فإنه لا يترتب على ذلك أي خسارة للاعبين ، أما إذا قال II عن الورقة المسحوبة بأنها الملكة فعندئذٍ سيدفع II لـــ I مبلغ 1$. والمطلوب :

1 ــ رسم شجرة المباراة .

2 ــ تحديد استراتيجيات كل من اللاعبين .

3 ــ إيجاد مصفوفة المباراة .

(15

يقوم كل من اللاعبين A و B برمي قطعة عملة متوازنة وقد اتفقا على أن A يربح 1$ من B إذا توافق الوجهان الظاهران و إلا فإن B يربح 1$ من A .

المطلوب :

أ) تحليل هذه اللعبة ورسم شجرتها وإيجاد استراتيجيات كل من اللاعبين .

ب) إيجاد مصفوفة العوائد ثم حساب قيمة هذه اللعبة .

(16

يقوم كل من اللاعبين A و B وبشكل مستقل بكتابة أحد الأعداد 3 ، 2 ، 1 فإذا كان مجموع ناتج الكتابة زوجي فإن A يدفع لـــB مقدار هذا المجموع بالدولار أما إذا كان مجموع ناتج الكتابة فردي فإن B يدفع لـــ A مقدار هذا المجموع بالدولار .

المطلوب :

أ) تحليل هذه اللعبة ورسم شجرتها وإيجاد استراتيجيات كل من A و B .

ب) إيجاد مصفوفة العوائد ثم حساب قيمة هذه اللعبة .

ج) هل الحل الأمثل هو استراتيجية بحته أم مختلطة ؟ وما هي هذه الاستراتيجية .

(17

تتنافس فرقتان عسكريتان A و B على احتلال موقعين عسكريين L_1 و L_2 في إحدى المناورات . تتكون الفرقة A من لواءين بينما تتكون الفرقة B من لواء واحد ، وتهدف قيادة كل فرقة إلى تحقيق أكبر ربـــح ممكن وفقاً للقاعدة التالية: مقدار ربح أو خسارة الفرقة في أي موقع يســـاوي الفرق في عـــدد ألويتها المتواجدة في ذلك الموقع على ألوية الفرقة الأخـــرى . أوجد كل من شجرة المباراة واستراتيجيات كل من الفرقتين ومصفوفة العوائد والحل الأمثل لكلا الفرقتين .

(18

تمثل المصفوفة التالية مصفوفة العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة لشركتي فنادق لكســـب الزبائن في عواصم إحدى الدول ، الأرقام بمئات الملايين من الدولارات

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 4 & -8 & -10 \\ -10 & -10 & 14- \end{bmatrix}$$

هل من هيمنة بين الاستراتيجيات

ما هي الاستراتيجية المثلى لكلا الشركتين وقيمة المباراة . أوجد الحل

(19

أوجد الحل الأمثل للمباريات التالية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \\ 5 & 4 & 5 \\ 16 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

(20

تتنافسان مؤسستان في سوق معين وكل مؤسسة تستطيع أن نختار للترويج عن بضـــاعتها ، أما عن طـــريق التلفزيون أو عن طـــريق الجرائد إذا علمت أن حصص المؤسستين في السوق وفقاً للطرق الدعائية معطاة في :

المؤسسة A		المؤسسة B: J	المؤسسة B: TV
	J	0.60	0.40
	TV	0.50	0.70

فـــما هي الاستراتيجية المثلى لكل مؤسسة حـــول اســـتخدام التلفزيون والجرائد في ترويج بضائعها .

(21

شركتان بصدد اتخاذ قرار للإعلان عن منتجاتها المتنافسة ويمكن لأي منها أن تعرض إنتاجها في السوق الأول أو في السوق الثاني ، فإذا عرضت الشركتان إنتاجهما في الســـوق نفسه فإن كل شركة ستبيع من منتجاتها بنسبة % 30 من المستهلكين وإن عرضت منتجاتها في سوق مختلف فإنها ستبيعه إلى % 50 من المستهلكين ، وقد قدر عدد مستهلكي السوق الأول بـــ 40000 مستهلك وعدد مستهلكي السوق الثاني 60000 مستهلك . إذا علمت أن كل شركة تهدف إلى جعل الفرق بين عدد زبائنها وزبائن الشركة المنافسة أكبر ما يمكن المطلوب تحليل هذه المباراة ورسم شجرتها وإيجاد مصفوفة العوائد ومن ثم الحل المثل لكل منهما .

(22

لنفرض أن شخصين A ، B يلعبان المباراة التالية :

يكتب كل منهما رقماً على ورقة ولا يراها الأخر ثم تكشف الورقتان معاً فإذا كان الرقمان فرديين فإن B يدفع لـــ A مبلغ ثلاثة دولارات وإذا كان الرقمان زوجيين فإن B يدفع لـــ A دولا واحد ، أما إذا كان الرقمين أحدهما زوجياً والأخر فردياً فإن A هو الذي يدفع لـــ B دولارين والمطلوب :

1 ــ ارسم شجرة المباراة واكتب مصفوفة العوائد لهذه المباراة .

2 ــ أوجد الحل الأمثل للمباراة

(23

أوجد الحل الأمثل لكل من المباريات التالية باستخدام طريقة البرمجة الخطية :

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 10 & 20 & -20 & 13 \\ 12 & 14 & 0 & 15 \\ 7 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(24

المصفوفة التالية :

تبين الاستراتيجيات الثلاث للدفاع الجوي لمقابلة طائرات العدو الذي يستخدم ثلاثة أساليب في الهجوم ، والمطلوب تحديد أفضل أسلوب للدفاع الجوي لإيقاع أكبر خسارة في طائرات العدو ثم إيجاد قيمة هذه الخسائر .

استراتيجيات الدفاع الجوي \ استراتيجيات الهجوم			
	0.7	0.2	0.05
	0.4	0.45	0.15
	0.2	0.25	0.5

(25

تتنافس شركتان لصناعة الطائرات الحربية للحصول على أكبر عدد من الدول المشترية لطائرتها . إن الأسـلوب المتبع لزيادة نصيب كل شركة في السوق هو استخدام أسلوب الدعاية وتتبع كل شركة ثلاثة خطط خاصة بالحملة الدعائية وتبين المصفوفة التالية نسبة عدد الدول للشركة الأولى A .

(26

قررت قيادة الجيش في الدولة A مهاجمة المصنع الحربي الرئيسي للدولة B الواقع في ضواحي عاصمتها وقد بلغ ذلك إلى علم الدولة B وعلمت أن هذا الهجوم سيكون عن طريق الإنزال الجـــوي أو الإنزال البحري إلا أن القوة العسكرية التي تمتلكها B لا تسمح لها بحشد القـــوات اللازمة لكل من الهجومين (عند B من القوات ما يكفي لصد أحد الهجومين) ولكنها تستطيع مع ذلك أن تجهز كميناً لمواجهة الهجوم الآخـــر بعد انسحابه . إن الجيش المهاجم من A يمتلك القليل من الذخيرة وقد تبينت الحقائق التالية :

إذا تلاقـــى الجيشـــان فإن جيش A سينسحب وبذلك فإن B تكســـب المعركـــة (خسائر A عندها تقدر بـــ 15 $ مليون) . وإذا لم يلتق الجيشين عند المصنع فإن جيش A ســـيصل إلى المصنع ويكبد B خسارة قدرها 200 $ مليون . هناك احتمال قدرة 0.7 بأن يصادف هذا الجيش في عودته كميناً سيكبده خسائر تقدر بـــ 100 $ مليون . في حال الإنزال الجوي و 70 $ مليون في حال الإنزال البحري . صغ هذه المسألة كمباراة ذات مجموع صغرى وأوجد الاستراتيجية المثلى لكلا الجيشين .

(27

تتنافس شركتان A و B لتصنيع السلاح في تسويق منتجاتهما ولدى كل منهما استراتيجيتان مختلفتان لهذا الغرض . ونتيجة للدراسات فقد وجد أن العوائد المقابلة لهذه الاستراتيجيات معطاة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (3, -1) & (-1, 1) \\ (1, 0) & (-2, -1) \end{bmatrix}$$

(1) أوجد جميع نقاط التوازن لهذه المباراة .

(2) إذا اعتبرنا هذه المباراة تفاوضية أوجد أفضل استراتيجية لكلا الشركتين والتي تجعل عوائدها أكبر ما يمكن

(28

إن الحفاظ على مواقـــع التحكم والسيطرة من الأمور ذات الشـــأن الكبير في الدول . ولدى الطرف المعادي ثلاث استراتيجيات مختلفة لضرب وإضعاف هذه المواقع (من الجو ، من البحر ، من القوات البرية) كمـــا أن لـــدى الطـــرف المدافع أيضاً ثلاث استراتيجيات مختلفة للدفاع وقد تم تقدير العوائد المقابلة لهذه الاستراتيجيات المختلفة كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1\ ,\ 4) & (3\ ,\ -1) & (-2\ ,\ -2) \\ (1\ ,\ 0) & (-1\ ,\ 2) & (3\ ,\ 3) \\ (5\ ,\ 1) & (4\ ,\ 2) & (-1\ ,\ -1) \end{bmatrix}$$

(1) هل لهذه المباراة نقاط توازن ؟ ما هي في حال الإيجاب ؟

(2) هل يوجد لهذه المباراة استراتيجيات بارزة ؟ وما هي في حال الإيجاب ؟

(29

لدى كل من دولتين جارتين بينهما نزاع طويل الأمد ثلاث طرق لمواجهة الدولة الأخرى وإضعافها (سياسية ــ عسكرية ــ اقتصادية) ونتيجة للدراسات فقــد تبين أن العوائد المقابلة لاستراتيجيات الدولتين هي كما في المصفوفة التالية :

$$G = \begin{bmatrix} (1\ ,\ 5) & (4\ ,\ -1) & (3\ ,\ 2) \\ (2\ ,\ 3) & (2\ ,\ 4) & (5\ ,\ 0) \\ (4\ ,\ 1) & (3\ ,\ -1) & (0\ ,\ 3) \end{bmatrix}$$

(1) هل هذه المباراة قابلة للاختصار بواسطة الهيمنة .

(2) أوجد نقاط التوازن للمباراة غير التعاونية .

(30

تواجه إحدى الدول تمرداً مسلحاً من إحدى الجماعات فيها والتي تستخدم حرب العصابات أحياناً واختطاف الرهائن أحياناً أخرى ولدى الجيش في هذه الدولة أيضاً خطتان ممكنتان لمواجهة هذا التمرد هما إما الهجوم الشامل أو بالقصف الجوي لأماكن المتمردين . يبين الجدول التالي العوائد المقابلة للاستراتيجيات المختلفة :

المتمردين	الدولة	
	هجوم شامل	قصف جوي
حرب عصابات	(1 , 5)	(-2 , -3)
اختطاف الرهائن	(1 , 5)	(-5 , 0)

(1) أوجد جميع نقاط التوازن للمباراة بطريقة سواستكا .

(2) ما هي الاستراتيجية المثلى لكل من الدولة والمتمردين

(31

لدينا المباراة التالية ذات المجموع غير الصفري لشخصين :

$$G = \begin{bmatrix} (3,2) & (3,0) & (2,2) \\ (1,0) & (3,3) & (0,3) \\ (0,2) & (0,0) & (2,3) \end{bmatrix}$$

(1) ما هي نقـــاط التوازن لهذه المبـــاراة ؟ وهل يوجد بينهمـــا اســـتراتيجية بارزة ؟

المراجع

- *Applied Management Science, By J.A. Lawrence and B.A. Pasternack, 2nd ed. Wiley*
- *Operations Research, an introduction, By Hamdy Taha, 8th ed. Prentice-Hall*
- *A Guide to Game Theory,By Fiona Carmichael, 1st. ed. Prentice-Hall*
- *Game Theory, Thomas S. Ferguson, Publisher: UCLA 2008*
- *Spreadsheet Modeling & Decision Analysis,Cliff T. Ragsdale,5e. Thomson, South-Western*
- *Treeplan Manual, http://www.treeplan.com.*
- *Gambit: Software Tools for Game Theory, online Manual, http://www.gambit-project.org/doc/index.html.*
- *Sage Reference Manual: Game Throry Release 6.8, Jan 29,2015.*
- مقدمة في بحوث العمليات. تأليف الدكتور زيد البلخي. جامعة الملك سعود.
- نظرية المباريات. تأليف الدكتور زيد البلخي. جامعة الملك سعود.

ملحق: الحل بواسطة LINGO:

For lingo

$$maximize: \quad v$$

$$st:$$

$$v - 2x_1 - 4x_2 \le 0$$

$$v - 2x_1 - 3x_2 \le 0$$

$$v - 3x_1 - 2x_2 \le 0$$

$$v + x_1 - 6x_2 \le 0$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \ge 0, x_1 \ge 0, v \ unrestricted$$

```
MIN = v;
-v - 2*x1 - 4*x2 <= 0;
-v - 2*x1 -3*x2 <=0;
-v - 3*x1 -2*x2 <= 0;
-v + x1 - 6*x2 <= 0;
x1 + x2 =1;
@FREE(v);
```

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              -2.500000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             3


                      Variable           Value        Reduced Cost
                             V      -2.500000            0.000000
                            X1       0.5000000           0.000000
                            X2       0.5000000           0.000000

                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                             1      -2.500000           -1.000000
                             2       0.5000000           0.000000
                             3       0.000000            0.000000
                             4       0.000000           0.8750000
                             5       0.000000           0.1250000
                             6       0.000000            2.500000
```

maximize v

st

$$v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 0$$
$$v - x_1 - 4x_2 + 6x_3 \le 0$$
$$v + 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$
v *unrestricted*

```
MIN = v;
-v - 3*x1 + 2*x2 + 5*x3 <= 0;
-v - x1 - 4*x2 + 6*x3 <=0;
-v + 3*x1 + x2 - 2*x3 <= 0;
x1 + x2 + x3 =1;
@FREE(v);
```

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.8350515
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             4


                       Variable           Value        Reduced Cost
                              V       0.8350515            0.000000
                             X1       0.4432990            0.000000
                             X2       0.2061856            0.000000
                             X3       0.3505155            0.000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1       0.8350515          -1.000000
                              2        0.000000           0.2989691
                              3        0.000000           0.9278351E-01
                              4        0.000000           0.6082474
                              5        0.000000          -0.8350515
```

minimize v

st

$$v - 3y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 0$$
$$v + 2y_1 - 4y_2 + y_3 \geq 0$$
$$v + 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 \geq 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$
v *unrestricted*

max v

st

$$v - 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 0$$
$$v - 2x_1 - 7x_3 \leq 0$$
$$v + 8x_1 - 6x_2 - x_3 \leq 0$$
$$v - 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, v \text{ unrestrected}$$

```
MIN = v;
-v - 2*x1 + 2*x2 - 2*x3 <= 0;
-v - 2*x1 - 0*x2 - 7*x3 <=0;
-v + 8*x1 - 6*x2 - x3 <= 0;
-v - 6*x1 + 4*x2 + 3*x3 <= 0;
x1 + x2 + x3 =1;
@FREE(v);
```

```
  Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.4440892E-15
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                             4

                       Variable           Value        Reduced Cost
                              V        0.000000            0.000000
                             X1       0.3888889            0.000000
                             X2       0.5000000            0.000000
```

X3	0.1111111	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	-1.000000
2	0.000000	0.3333333
3	1.555556	0.000000
4	0.000000	0.3333333
5	0.000000	0.3333333
6	0.000000	0.000000

ملحق: نظام SageMath للحسابات الرياضية:

و هو برنامج مجاني من المصدر المفتوح open-source مبني على عدد كبير من الحزم الرياضية ذات المصدر المفتوح مثل Python و R وغيرها. وهو بديل ممتاز لبرامج مثل Matlab و Mathematica و Maple وغيرها.

يمكن تنزيلة من الموقع http://www.sagemath.org/ و هو يعمل بأربعة طرق إما كنظام تشغيل مستقل (كإصدار من Linux) او داخل صندوق إفتراضي Virtual Box او من SageMathCloud الموقع السحابي على

https://cloud.sagemath.com او الموقع التفاعلي SageMathCell

https://sagecell.sagemath.org ويوجد موقع للمساعدة

http://sagemath.wikispaces.com

يمكن إستخدام SageMath لدراسة الرياضيات البسيطة او المتقدمة مثل الجبر و التفاضل و التكامل نظرية الأعداد نظرية التعمية و الترميز الطرق العددية نظرية المجموعات طرق العد نظرية الرسومات نظرية الألعاب وغيرها. وهو مناسب للتعليم و الأبحاث.

واجهة الإستخدام تكون إما دفتر Notebook أو سطر اوامر Command Line و سوف نستعرض كلا منهم.

بعد تثبيت البرنامج سوف نستخدم سطر الأوامر كالتالي:(لاحظ محفذ الأوامر هو (sage:

ملاحظة: SageMath مبني على Python أنظر كتابي الإحصاء في بايسون بالأمثلة

http://www.abarry.ws/Statistics with Python by Example.pdf

أمثلة:

```
sage: a = 5
sage: a
5
sage: 2 == 2
True
sage: 2 == 3
False
sage: 2 < 3
True
sage: a == 5
True

sage: 2**3    #  ** means exponent
8
sage: 2^3     #  ^ is a synonym for **
(unlike in Python)
8
sage: 10 % 3  #  for integer arguments, %
means mod, i.e., remainder
1
sage: 10/4
5/2
sage: 10//4   #  for integer arguments, //
returns the integer quotient
2
sage: 4 * (10 // 4) + 10 % 4 == 10
True
sage: 3^2*4 + 2%5
38

sage: sqrt(3.4)
1.84390889145858
sage: sin(5.135)
-0.912021158525540
```

```
sage: sin(pi/3)
1/2*sqrt(3)

sage: exp(2)
e^2
sage: n(exp(2))
7.38905609893065
sage: sqrt(pi).numerical_approx()
1.77245385090552
sage: sin(10).n(digits=5)
-0.54402
sage: N(sin(10),digits=10)
-0.5440211109
sage: numerical_approx(pi, prec=200)
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459

sage: a = 5   # a is an integer
sage: type(a)
<type 'sage.rings.integer.Integer'>
sage: a = 5/3  # now a is a rational number
sage: type(a)
<type 'sage.rings.rational.Rational'>
sage: a = 'hello'  # now a is a string
sage: type(a)
<type 'str'>
sage: 011
9
sage: 8 + 1
9
sage: n = 011
sage: n.str(8)   # string representation of
n in base 8
'11'
```

نظام المساعدة:

```
sage: tan?
Type:        <class
'sage.calculus.calculus.Function_tan'>
Definition:  tan( [noargspec] )
Docstring:

    The tangent function

EXAMPLES:
sage: tan(pi)
0
sage: tan(3.1415)
-0.00009265359005819l3
sage: tan(3.1415/4)
0.999953674278156
sage: tan(pi/4)
1
sage: tan(1/2)
tan(1/2)
sage: RR(tan(1/2))
0.546302489843790
sage: log2?
Type:        <class
'sage.functions.constants.Log2'>
Definition:  log2( [noargspec] )
Docstring:

    The natural logarithm of the real number
2.

EXAMPLES:
sage: log2
log2
sage: float(log2)
0.6931471805599453
```

```
sage: RR(log2)
0.693147180559945
sage: R = RealField(200); R
Real Field with 200 bits of precision
sage: R(log2)

0.693147180559945309417232121458176568075500
1343602552541206 8
sage: l = (1-log2)/(1+log2); l
(1 - log(2))/(log(2) + 1)
sage: R(l)

0.181232218299282499487613818646503114233306
0977477601348805 6
sage: maxima(log2)
log(2)
sage: maxima(log2).float()
.6931471805599453
sage: gp(log2)
0.693147180559453094172321215     # 32-bit

0.693147180559945309417232121458176568 07
# 64-bit
sage: sudoku?
File:         sage/local/lib/python2.5/site-
packages/sage/games/sudoku.py
Type:         <type 'function'>
Definition:   sudoku(A)
Docstring:

Solve the 9x9 Sudoku puzzle defined by the
matrix A.

EXAMPLE:
```

```
sage: A = matrix(ZZ,9,[5,0,0, 0,8,0, 0,4,9,
0,0,0, 5,0,0,0,3,0, 0,6,7, 3,0,0, 0,0,1,
1,5,0, 0,0,0, 0,0,0, 0,0,0, 2,0,8, 0,0,0,
0,0,0, 0,0,0, 0,1,8, 7,0,0, 0,0,4, 1,5,0,
0,3,0, 0,0,2,0,0,0, 4,9,0, 0,5,0, 0,0,3])
sage: A
        [5 0 0 0 8 0 0 4 9]
        [0 0 0 5 0 0 0 3 0]
        [0 6 7 3 0 0 0 0 1]
        [1 5 0 0 0 0 0 0 0]
        [0 0 0 2 0 8 0 0 0]
        [0 0 0 0 0 0 0 1 8]
        [7 0 0 0 0 4 1 5 0]
        [0 3 0 0 0 2 0 0 0]
        [4 9 0 0 5 0 0 0 3]
sage: sudoku(A)
        [5 1 3 6 8 7 2 4 9]
        [8 4 9 5 2 1 6 3 7]
        [2 6 7 3 4 9 5 8 1]
        [1 5 8 4 6 3 9 7 2]
        [9 7 4 2 1 8 3 6 5]
        [3 2 6 7 9 5 4 1 8]
        [7 8 2 9 3 4 1 5 6]
        [6 3 5 1 7 2 8 9 4]
        [4 9 1 8 5 6 7 2 3]
```

تعريف الدوال:

```
sage: def is_even(n):
....:     return n%2 == 0
sage: is_even(2)
True
sage: is_even(3)
False

sage: def is_divisible_by(number,
divisor=2):
```

```
....:     return number%divisor == 0
sage: is_divisible_by(6,2)
True
sage: is_divisible_by(6)
True
sage: is_divisible_by(6, 5)
False

sage: is_divisible_by(6, divisor=5)
False
sage: is_divisible_by(divisor=2, number=6)
True

sage: def even(n):
....:     v = []
....:     for i in range(3,n):
....:         if i % 2 == 0:
....:             v.append(i)
....:    return v
Syntax Error:
       return v


sage: def even(n):
....:     v = []
....:     for i in range(3,n):
....:         if i % 2 == 0:
....:             v.append(i)
....:     return v
sage: even(10)
[4, 6, 8]

sage: a = 5; b = a + 3; c = b^2; c
64
```

```
sage: 2 + \
....:     3
5

sage: for i in range(3):
....:     print i
0
1
2

sage: for i in range(2,5):
....:     print i
2
3
4


sage: for i in range(1,6,2):
....:     print i
1
3
5

sage: for i in range(5):
....:     print '%6s %6s %6s'%(i, i^2, i^3)
     0      0      0
     1      1      1
     2      4      8
     3      9     27
     4     16     64


sage: range(2,10)
[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
sage: v = [1, "hello", 2/3, sin(x^3)]
sage: v
[1, 'hello', 2/3, sin(x^3)]


sage: v[0]
1
sage: v[3]
sin(x^3)

sage: len(v)
4
sage: v.append(1.5)
sage: v
[1, 'hello', 2/3, sin(x^3),
1.50000000000000]
sage: del v[1]
sage: v
[1, 2/3, sin(x^3), 1.50000000000000]


sage: d = {'hi':-2,  3/8:pi,   e:pi}
sage: d['hi']
-2
sage: d[e]
pi


sage: class Evens(list):
....:     def __init__(self, n):
....:         self.n = n
....:         list.__init__(self, range(2,
n+1, 2))
....:     def __repr__(self):
```

```
....:         return "Even positive numbers
up to n."


sage: e = Evens(10)
sage: e
Even positive numbers up to n.


sage: list(e)
[2, 4, 6, 8, 10]

sage: e.n
10
sage: e[2]
6
```

الجبر و التفاضل و التكامل:

```
sage: u = var('u')
sage: diff(sin(u), u)
cos(u)

sage: x = var('x')
sage: solve(x^2 + 3*x + 2, x)
[x == -2, x == -1]

sage: x, b, c = var('x b c')
sage: solve([x^2 + b*x + c == 0],x)
[x == -1/2*b - 1/2*sqrt(b^2 - 4*c), x == -
1/2*b + 1/2*sqrt(b^2 - 4*c)]

sage: x, y = var('x, y')
sage: solve([x+y==6, x-y==4], x, y)
[[x == 5, y == 1]]
```

```
sage: var('x y p q')
(x, y, p, q)
sage: eq1 = p+q==9
sage: eq2 = q*y+p*x==-6
sage: eq3 = q*y^2+p*x^2==24
sage: solve([eq1,eq2,eq3,p==1],p,q,x,y)
[[p == 1, q == 8, x == -4/3*sqrt(10) - 2/3,
y == 1/6*sqrt(5)*sqrt(2) - 2/3],
 [p == 1, q == 8, x == 4/3*sqrt(10) - 2/3, y
== -1/6*sqrt(5)*sqrt(2) - 2/3]]


sage: solns =
solve([eq1,eq2,eq3,p==1],p,q,x,y,
solution_dict=True)
sage: [[s[p].n(30), s[q].n(30), s[x].n(30),
s[y].n(30)] for s in solns]
[[1.0000000, 8.0000000, -4.8830369, -
0.13962039],
 [1.0000000, 8.0000000, 3.5497035, -
1.1937129]]


sage: theta = var('theta')
sage: solve(cos(theta)==sin(theta), theta)
[sin(theta) == cos(theta)]

sage: phi = var('phi')
sage: find_root(cos(phi)==sin(phi),0,pi/2)
0.785398163397448...


sage: u = var('u')
sage: diff(sin(u), u)
```

```
cos(u)

sage: diff(sin(x^2), x, 4)
16*x^4*sin(x^2) - 48*x^2*cos(x^2) -
12*sin(x^2)

sage: x, y = var('x,y')
sage: f = x^2 + 17*y^2
sage: f.diff(x)
2*x
sage: f.diff(y)
34*y

sage: integral(x*sin(x^2), x)
-1/2*cos(x^2)
sage: integral(x/(x^2+1), x, 0, 1)
1/2*log(2)

sage: f = 1/((1+x)*(x-1))
sage: f.partial_fraction(x)
-1/2/(x + 1) + 1/2/(x - 1)

sage: t = var('t')    # define a variable t
sage: x = function('x',t)   # define x to be
a function of that variable
sage: DE = diff(x, t) + x - 1
sage: desolve(DE, [x,t])
(_C + e^t)*e^(-t)


sage: s = var("s")
sage: t = var("t")
sage: f = t^2*exp(t) - sin(t)
sage: f.laplace(t,s)
-1/(s^2 + 1) + 2/(s - 1)^3
```

لتفاصيل أكثر انظر

http://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/

ملحق:

تعريف للمباريات القياسية:

1)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.AntiCoordinationGame(A=3, a=3,B=5, b=1,C=1, c=5,D=0, d=0)
```

مباراة ضد التنسيق هي نوع خاص من المباريات حيث توازنات ناش البحتة تكون للاعبين الذين يختاروا إستراتيجيات مختلفة.

في الغالب تمثل على الشكل الطبيعي بإستخدام المصفوفتين التالية:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

حيث $A < B,\ D < C$ and $a < c,\ d < b$

2)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.BattleOfTheSexes()
```

لنعتبر لاعبين رجل و زوجته. الزوجة تفضل العاب الفيديو و الزوج يفضل مشاهدة فلم وفي نفس الوقت يفضل الزوجان قضاء الوقت معا.

يمكن نمذجة هذه الحالة بالشكل الطبيعي مستخدمين المصفوفات

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

هذه المباراة هي نوع خاص من مباريات التنسيق و يوجد لها 3 توازنات ناش

1- الزوج و الزوجة كلاهما يلعب لعبة الفديو

2- الزوج و الزوجة كلاهما يشاهد الفلم

3- الزوجة تلعب لعبة الفديو 75% من الوقت و الزوج يشاهد الفلم 75% من الوقت.

3)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.Chicken(
A=0,a=0, B=1, b=-1,C=-1, c=1,D=-10, d=-10)
```

لنعتبر 2 سائقي سيارات متواجهين في معركة كرامة شديدة. الإثنين متجهين نحو هاوية و الخاسر هو من يفرمل قبل الآخر. إذا لم يفرمل أي منهم فإنة سوف يهوي إلى حتفه.

يمكن نمذجة هذه كحالة خاصة من مبارة ضد التنسيق مستخدمين المصفوفات التالية

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

حيث $A < B, D < C$ and $a < c,\ d < b$ مع الشرط الإضافي أن $A > C$ و $a > b$

المصفوفات التالية تستخدم كقيم إفتراضية

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -10\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -10\end{pmatrix}$$

توجد لهذه الحالة 3 توازنات ناش

1- السائق الثاني يفرمل.

2- السائق الأول يفرمل.

3- كلاهما يفرمل بنسبة 1 من 10 من المرات.

4)

sage.game_theory.catalog_normal_form_games.**CoordinationGame**

(A=10, a=5, B=0, b=0, C=0, c=0,D=5, d=10)

مباراة التنسيق هي نوع خاص من المباريات التي يكون توازن ناش فيها للاعبين الذين يختاروا نفس الإستراتيجية.

وتنمذج بالشكل الطبيعي مستخدمين المصفوفات التالية

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

حيث $A > B, D > C$ و $a > c,\ d > b$ وتستخدم المصفوفات التالية كقيم إفتراضية

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

5)

sage.game_theory.catalog_normal_form_games.**HawkDove**
(*v*=2, *c*=3)

لنفترض ان شخصين يجب عليهم المشاركة في مصدر غذاء محدود v. الشخصين يمكن ان يتصرفوا مثل الحمامة (بوداعة) أو مثل الصقر (بتوحش).

1- إذا تصرف احدهم كحمامة وتواجه مع المتصرف كصقر فإن الصقر يستحوذ على الغذاء.

2- إذا تصرف الإثنان كحمامة فإنهم يتشاركوا في الغذاء.

3- إذا تصرف الإثنان كصقر أحدهم سوف يكسب (بنفس التوقع للإثنين) ويستولي على الغذاء بينما الآخر سوف يعاني بمقدار c حيث $c > v$.

يمكن نمذجة هذا الوضع لمباراة على الشكل الطبيعي بمصفوفات

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v/2 - c & v \\ 0 & v/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} v/2 - c & 0 \\ v & v/2 \end{pmatrix}$$

المصفوفات التالية لمباراة في الشكل الإفتراضي لقيم $v = 2$ و $c = 3$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

هذا مثال خاص لنموذج عدم التنسيق anti coordination game ويوجد 3 من إستقرار ناش هي:

1- واحد يتصرف كصقر و الآخر كحمامة.

2- كلاهما يخلط كونه صقر و حمامة.

6)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.Matching
Pennies()
```

لنعتبر لاعبين والذين يقوما برمي عملة كلاهما في نفس اللحظة ثم إظهار الناتج لبعضهم. إذا ظهر الوجه نفسه فإن الاعب الأول يكسب 1 وإلا يكسب الاعب الثاني.
يمكن نمذجة هذه الحالة كمباراة ذات مجموع صفري في الشكل الطبيعي بالمصفوفة:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

يوجد إستقرار ناش واحد و التي يختار كل لاعب إستراتيجيته بشكل عشوائي و بنفس الإحتمال.

7)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.Pigs()
```

لنعتبر حيوانين. واحد حيوان مسيطر وواحد خاضع. الحيوانين يشتركا في وعاء للأكل. يوجد ذراع للضغط عند الوعاء و الذي يسقط 6 وحدات غذاء ولكن إذا اي منهم ضغط الذراع فإن ذلك يستغرقهم فترة للحصول على الطعام كما انه سيكلفهم وحدة واحدة من الغذاء. إذا ضغط المسيطر على الذراع فإن الخاضع لديه بعض الوقت لأكل 3/4 كمية الغذاء قبل ان يقوم المسيطر بطرده. إذا ضغط الخاضع الذراع فإن المسيطر سيقوم بأكل جميع الغذاء. إذا قاما الإثنين بالضغط على الذراع فإن الخاضع سيتمكن من أكل 1/3 الغذاء وسيخسر كلاهما وحدة واحدة من الغذاء.
يمكن نمذجة هذا الوضع على الشكل الطبيعي مستخدمين المصفوفات (بإفتراض ان مصفوفة المدفوعات للمسيطر هي A).

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

يوجد توازن ناش واحد وهو ان يقوم المسيطر بضغط الذراع بينما الخاضع لايضغط.

8)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.PrisonersDilemma
(R=-2, P=-4, S=-5,T=0)
```

لنفترض ان لصين تم القبض عليهم بواسطة الشرطة ووضع كل منهما في غرفة تحقيق منفصلة. إذا تعاون كليهما و لم يدلي أي منهم أي معلومات للشرطة فإن كلاهما يتحصل على عقوبة بسيطة. إذا واحد اعترف بعد عقد إتفاق مع الشرطة بعقوبة بسيطة فإن الآخر يتم عقوبته بسجن طويل. إذا كلاهما عقد إتفاق مع الشرطة فإنهم يتحصلا على عقوبة من الجنس لفترة متوسطة الطول.

يمكننا نمذجة ما يسمى بحيرة المساجين على الشكل الطبيعي مستخدمين المصفوفات التالية:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}R & S\\ T & P\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}R & T\\ S & P\end{pmatrix}$$

حيث $T > R > P > S$.

1- R عقوبة السجن للمتعاون.

2- S منفعة المغفل.

3- P منفعة الضغط على اللاعب الآخر.

4- T الدفوع من إستدراج اللص.

المصفوفات الإفتراضية:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -5 & -4\end{pmatrix}$$

يوجد توازن ناش وحيد وهو كلا اللصين يعترف.

9)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.RPS()
```

الصخرة - الورقة - المقص هي مباراة ذات مجموع صفري للاعبين إثنين حيث كل لاعب يشكل بيد ممتدة حركة واحدة من ثلاثة أشكال في نفس الوقت. المباراة نتيجتها 3 إمكانيات بلإضافة إلى تعادل. الاعب الذي يؤدي حركة الصخرة سوف يفوز على اللاعب الذي يؤدي حركة المقص (الصخرة تحطم المقص) ولكن يخسر للاعب الذي يؤدي حركة الورقة (الورقة تغطي الصخرة). الذي يؤدي حركة الورق يخسر للذي يؤدي حركة المقص (المقص يقص الورقة). إذا أدى اللاعبين نفس الحركة فهذا يؤدي لتعادل.

يمكن نمذجة هذا الوضع بمباراة ذات مجموع صفري بالشكل الطبيعي بالمصفوفة التالية

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

10)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.RPSLS()
```

توسع للمباراة السابقة بخمس حركات ممكنة بدل ثلاثة.

1- المقص يقص الورق.

2- الورق يغطي الصخرة.

3- الصخرة تحطم السحلية.

4- السحلية تسسم سبوك (شخصية خرافية).

5- سبوك يكسر المقص.

6- المقص يقطع رأس السحلية.

7- السحلية تأكل الورق.

8- الورق يدين سبوك.

9- سبوك يبخر الصخرة.

10- الصخرة تحطم المقص.

يمكن نمذجة هذه المباراة كمجموع صفري بالشكل الطبيعي بمصفوفة:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

11)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.StagHunt
()
```

صديقين يخرجوا للصيد. كل واحد منفصلا يستطيع إختيار صيد وعل او ارنب. كل لاعب يجب ان يختار بدون معرفة إختيار الآخر. إذا اختار واحد صيد وعل فيجب عليه الإستعانة برفيقه لكي ينجح. أي فرد يستطيع صيد ارنب بنفسة بدون إستعانة ولكن الأرنب أقل قيمة من الوعل.

يمكن نمذجة هذه المبارة بالشكل الطبيعي بالمصفوفتين:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

هذه حالةخاصة من مبارايات التنسيق. توجد 3 حالات من توازن ناش:

1- كلا الصديقين يقوما بصيد الوعل.

2- كلا الصديقين يقوا بصيد الأرنب.

3- كلا الصديقين يقوما بصيد الوعل 2/3 الوقت.

12)

```
sage.game_theory.catalog_normal_form_games.TravellersDilemma(max_value=10)
```

شركة طيران تفقد حقيبتين لمسافرين مختلفين. بالصدفة الحقيبتين متشابة تماما وكذلك محتوياتهما متشابة. مسؤول في الشركة يحاول حل الموقف وذلك بتوضيح ان الشركة مستعدة قانونيا بدفع 10 دولارات حد اقصى لكل حقيبة ولكي يحدد سعر صحيح للحقيبة مع محتوياتها عزل المسوؤل المسافرين حتى لا يتمكنوا من التشاور بينهم وسئلوا بكتابة سعر المحتويات على ان لاتقل عن 2 دولار ولا تزيد عن 10 دولار. ايضا اخبرهم

المسوؤل انه في حالة كتابة المسفرين لنفس المبلغ فإنه سيعتبرة المبلغ الصحيح ويتم تعويض كلاهما بذلك المبلغ. ولكن إذا كتب أحدهم مبلغ اقل من الثاني فإن هذا المبلغ سيعتبر المبلغ الحقيقي ويتم تعويض كلاهما بذلك المبلغ مع دفع مبلغ 2 دولار إضافية للمسافر الذي كتب المبلغ الأقل و خصم 2 دولار للمسافر الآخر. الآن أي إستراتيجية يتخذها المسافرين ليقرر القيمة التي يكتبها؟

يمكن نمذجة هذه المباراة في الشكل الطبيعي بإستخدام المصفوفات التالية:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}10 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 11 & 9 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 10 & 10 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 9 & 9 & 9 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 5 & 2 & 1 & 0\\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 0\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}10 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4\\ 7 & 9 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4\\ 6 & 6 & 8 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4\\ 5 & 5 & 5 & 7 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 6 & 5 & 4\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

يوجد توازن ناش وحيد وهو ان كلاهما يحدد أقل سعر ممكن.